Analiza matematyczna II.1

semestr zimowy 2019/2020

zadania na ćwiczenia, 15 i 19 XI 2019

Michał Kotowski

Zadanie 1. Niech $U \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem zwartym i wypukłym, a $f : U \to \mathbb{R}$ funkcją ciągłą na U i różniczkowalną we wnętrzu U. Załóżmy, że istnieją współczynniki $a_1, \dots, a_n$ nie wszystkie równe zeru takie, że dla dowolnego $x \in \operatorname{int} U$ zachodzi

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \geqslant 0.$$

Udowodnić, że f osiąga swoje maksimum i minimum na brzegu zbioru U.

Zadanie 2. Niech $U = \mathbb{R}^2 \setminus A$, gdzie $A = ((-\infty, 0] \times \{0\}) \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 1\}$. Rozpatrzmy funkcję $f : U \to \mathbb{R}$ daną wzorem

$$f(x,y) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{x}{y}, & y > 0, \\ \pi + \operatorname{arctg} \frac{x}{y}, & y < 0, \\ \frac{\pi}{2}, & y = 0. \end{cases}$$

Wykazać, że długość gradientu f jest ograniczona z góry na całym zbiorze U, ale pomimo to f nie spełnia warunku Lipschitza.

Zadanie 3. Niech $f(x, y) = xe^{xy^2}$ dla $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Wykazać, że f jest dwukrotnie różniczkowalna i znaleźć $(d^2 f)(1, 1)hh$ dla dowolnego $h \in \mathbb{R}^2$.

Zadanie 4. Obliczyć $d^2 f$ dla $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ danej jako $f(x) = \langle Ax, x\rangle$, gdzie $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

Zadanie 5. Niech $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ i niech $g(t) = f(\cos t, \sin t)$. Wyznaczyć $d^2 g(t)$ dla dowolnego $t \in \mathbb{R}$.