Analiza matematyczna II.1

semestr zimowy 2019/2020

zadania na ćwiczenia, 4 i 8 X 2019

Michał Kotowski

Zadanie 1. Dla $p \in [1, \infty)$ określamy funkcję $\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ wzorem

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p},$$

dodatkowo przyjmujemy

$$\|x\|_\infty := \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|.$$

Udowodnić, że dla $p \in [1, \infty]$ funkcja $\|\cdot\|_p$ jest normą na $\mathbb{R}^n$.

Zadanie 2. Wykazać, że dla $x \in \mathbb{R}^n$ mamy $\lim\limits_{p \to \infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$.

Zadanie 3. Wykazać, że jeśli $p, q \in (0, \infty]$ oraz $p \leqslant q$, to dla $x \in \mathbb{R}^n$ zachodzi $\|x\|_q \leqslant \|x\|_p$.

Zadanie 4. Rozpatrzmy przestrzeń unormowaną $(V, \|\cdot\|)$. Oznaczmy przez B domkniętą kulę jednostkową w normie $\|\cdot\|$:

$$B = \{v \in V : \|v\| \leqslant 1\}.$$

Wykazać, że B spełnia następujące własności:

(a) jeśli $v \in B$, to $-v \in B$ (symetria środkowa względem 0),

(b) jeśli $v, w \in B$ oraz $t \in [0, 1]$, to $tv + (1 - t)w \in B$ (wypukłość),

(c) dla każdego $v \in V$ istnieje takie $t > 0$, że $tv \notin B$ (ograniczoność),

(d) dla każdego $v \in V$ istnieje takie $t > 0$, że $tv \in B$ (pochłanianie).

Zadanie 5. Rozpatrzmy przestrzeń liniową V i niech $B \subseteq V$ będzie zbiorem spełniającym własności z poprzedniego zadania. Definiujemy dla $v \in V$ funkcję (tzw. *funkcjonał Minkowskiego*):

$$\|v\| := \inf \left\{ t \in (0, \infty) : \frac{1}{t} v \in B \right\}.$$

Wykazać, że $\|\cdot\|$ jest normą na V i B jest kulą jednostkową w tej normie.

Zadanie 6. Na przestrzeni liniowej V zadana jest norma $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ pochodząca od iloczynu skalarnego $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$. Wykazać, że dla dowolnych $v, w \in V$ spełniona jest *tożsamość równoległoboku*:

$$\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2\left(\|v\|^2 + \|w\|^2\right).$$

Zadanie 7. Załóżmy, że na przestrzeni liniowej V nad $\mathbb{R}$ zadana jest norma $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ spełniająca tożsamość równoległoboku oraz że operacje dodawania wektorów i mnożenia przez skalar są ciągłe w tej normie. Udowodnić, że norma $\|\cdot\|$ jest zadana przez iloczyn skalarny dany wzorem:

$$\langle v, w \rangle = \frac{1}{4}\left(\|v + w\|^2 - \|v - w\|^2\right).$$

Zadanie 8. Dla normy $\|\cdot\|$ na $\mathbb{R}^n$ definiujemy *normę dualną* wzorem:

$$\|x\|_* := \sup\{\langle x, y \rangle : \|y\| \leqslant 1\}.$$

Dla zbioru $K \subseteq \mathbb{R}^n$ określamy *zbiór polarny* $K^\circ := \{y \in \mathbb{R}^n : \forall x \in K\ \langle x, y \rangle \leqslant 1\}$. Wykazać, że $\|\cdot\|_*$ rzeczywiście jest normą na $\mathbb{R}^n$ i że jeśli B jest kulą jednostkową w normie $\|\cdot\|$, to B° jest kulą jednostkową w normie $\|\cdot\|_*$.