# Analiza matematyczna I.1

semestr zimowy 2023/2024

# zadania domowe, seria 6.

Michał Kotowski

Zadania należy rozwiązać **pisemnie** i oddać na ćwiczeniach w czwartek **21 XII 2023** (lub wysłać mailem przed rozpoczęciem ćwiczeń).

**Zadanie 1.** Zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazie ogólnym

(a) $a_n = \left(\frac{\ln n}{n}\right)^{\alpha}$, $\alpha > 0$

(b) $a_n = \frac{(n!)^n}{n^{n^2}}$

(c) $a_n = \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n^{2/3}}\right)}{\sqrt{n}}$

**Zadanie 2.** Załóżmy, że $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant 0$ jest nierosnącym ciągiem liczb rzeczywistych. Wykazać, że jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} n! a_{n!}$ również jest zbieżny. Podać przykład nierosnącego ciągu $a_n$ takiego, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} n! a_{n!}$ jest zbieżny, a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.

**Zadanie 3.** Rozpatrzmy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach dodatnich. Wykazać, że jeśli $\limsup_{n\to\infty} \frac{\ln a_n}{\ln n} < -1$, to szereg jest zbieżny, natomiast jeśli $\liminf_{n\to\infty} \frac{\ln a_n}{\ln n} > -1$, to szereg jest rozbieżny.

**Zadanie 4.** Zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazie ogólnym

(a) $a_n = \frac{n^3\left(\sqrt{2}+(-1)^n\right)^n}{3^n}$

(b) $a_n = \frac{4\cdot 7\cdot 10\cdot\ldots\cdot(4+3n)}{2\cdot 6\cdot 10\cdot\ldots\cdot(2+4n)}$

**Zadanie 5.** Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \left(\ln(\ln n)\right)^2}.$$