Analiza matematyczna I.1
semestr zimowy 2023/2024
zadania domowe, seria 4.

Michał Kotowski

Zadania należy rozwiązać **pisemnie** i oddać na ćwiczeniach we wtorek **14 XI 2023** (lub wysłać mailem przed rozpoczęciem ćwiczeń).

Zadanie 1. Rozpatrzmy ciąg a_n zdefiniowany rekurencyjnie:

$$\begin{aligned} &a_1 = a_2 = c, \\ &a_{n+2} = a_{n+1}(1 - a_n) \text{ dla } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Dla każdej z poniższych wartości c rozstrzygnąć, czy ciąg a_n jest zbieżny, a jeśli tak, to wyznaczyć jego granicę:

(a) $c = \frac{1}{2}$,

(b) $c = 2$.

Zadanie 2. Zbadać zbieżność ciągu a_n zdefiniowanego jako

$$a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n}.$$

Zadanie 3. Dla każdego z poniższych ciągów rozstrzygnąć, czy jest on zbieżny, a jeśli tak, to wyznaczyć jego granicę:

(a) $a_n = n^2 \left(e^{\frac{2}{n^2}} - e^{\frac{1}{n^2}} \right)$,

(b) $b_n = n^2 \ln \left(1 + \ln^2 \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right)$,

(c) $c_n = \sqrt[n]{n! - 2^n}$, $n \geqslant 4$.

Zadanie 4. Dla każdego z podpunktów podać przykłady ciągów a_n i b_n takich, że $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 1$, $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = +\infty$ i dla $c_n = a_n^{b_n}$ mamy

(a) $\lim\limits_{n \to \infty} c_n = 0$,

(b) $\lim\limits_{n \to \infty} c_n = \sqrt{2}$,

(c) $\lim_{n\to\infty} c_n = \frac{1}{\sqrt{2}}$,

(d) $\lim_{n\to\infty} c_n = +\infty$,

(e) granica $\lim_{n\to\infty} c_n$ nie istnieje.

Zadanie 5. Zbadać zbieżność ciągu a_n zdefiniowanego rekurencyjnie jako $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ dla $n \in \mathbb{N}$, a jeśli jest zbieżny, to wyznaczyć jego granicę.