Analiza matematyczna I.1
semestr zimowy 2023/2024
zadania domowe, seria 2.

Michał Kotowski

Zadania należy rozwiązać i być gotowym do zreferowania rozwiązań na ćwiczeniach w czwartek **19 X 2023.**

Zadanie 1. Załóżmy, że $A, B \subseteq \mathbb{R}$ są niepustymi zbiorami liczb rzeczywistych dodatnich. Definiujemy

$$A \cdot B = \{a \cdot b \,|\, a \in A, b \in B\},$$
$$\frac{1}{A} = \left\{\frac{1}{a} \,|\, a \in A\right\}.$$

(a) Wykazać, że $\sup(A \cdot B) = \sup A \cdot \sup B$.

(b) Wykazać, że jeśli $\inf A > 0$, to $\sup\left(\frac{1}{A}\right) = \frac{1}{\inf A}$, natomiast gdy $\inf A = 0$, to $\sup\left(\frac{1}{A}\right) = +\infty$.

Zadanie 2. Wykazać dla dowolnej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ nierówność

$$\sqrt{n} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}.$$

Zadanie 3. Wyznaczyć kresy zbioru

$$A = \left\{\sqrt[n]{n} - \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \,|\, n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Czy są one osiągane?

Zadanie 4. Wykazać, że jeśli $n \in \mathbb{N}$ i $x > y \geqslant 0$, to $\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{y} < \sqrt[n]{x - y}$.

Zadanie 5. Niech $k \geqslant 2$ będzie ustaloną liczbą naturalną. Wykazać dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ nierówność

$$\frac{n}{\sqrt[k]{n}\left(1 - \frac{1}{k}\right)} \geqslant 1 + \frac{1}{\sqrt[k]{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[k]{n}}.$$