

Analiza matematyczna I.1
semestr zimowy 2023/2024
zadania domowe, seria 1.

Michał Kotowski

Zadania należy rozwiązać i być gotowym do zreferowania rozwiązań na ćwiczeniach w czwartek **12 X 2023**.

Zadanie 1. Wyznaczyć kresy zbioru

$$A = \left\{ \frac{m+n}{m^2+n+1} \mid m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Czy są one osiągalne?

Zadanie 2. Wyznaczyć kresy zbioru

$$B = \left\{ \frac{n-1}{n+1} \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) \mid n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Czy są one osiągalne?

Zadanie 3. Wykazać dla dowolnego $n \geq 3$ i dowolnej liczby rzeczywistej $x > 0$ nierówność

$$(1+x)^n > 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2.$$

Zadanie 4. Wykazać dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ nierówność

$$\frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} + \dots + \frac{1}{5n+1} < \frac{2}{3}.$$

Zadanie 5. Wykazać, że jeśli $a, b > 0$, to dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność

$$(a+b)^n \leq 2^{n-1}(a^n + b^n).$$