

Analiza matematyczna I.1
semestr zimowy 2023/2024
zadania na ćwiczenia, 17 i 19 X 2023

Michał Kotowski

Zadanie 1. Wykazać dla dowolnych $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ nierówność

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right).$$

Zadanie 2. Wykazać dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ nierówność

$$\sum_{i=0}^n \sqrt{\binom{n}{i}} \leq \sqrt{(n+1)2^n}.$$

Zadanie 3. Załóżmy, że $A, B \subseteq \mathbb{R}$ są zbiorami niepustymi. Definiujemy

$$\begin{aligned} A + B &= \{a + b \mid a \in A, b \in B\}, \\ A - B &= \{a - b \mid a \in A, b \in B\}. \end{aligned}$$

Wykazać, że $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$, $\sup(A - B) = \sup A - \inf B$ oraz podać i uzasadnić analogiczne wzory na $\inf(A + B)$, $\inf(A - B)$.

Zadanie 4. Niech ϕ będzie rozwiązaniem równania $\phi^2 - \phi - 1 = 0$. Wykazać, że ϕ jest liczbą niewymierną.

Zadanie 5. Niech $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ będzie liczbą niewymierną. Wykazać, że zbiór $\{\{n\alpha\} \mid n \in \mathbb{N}\}$ jest gęsty w $[0, 1]$.