

Analiza matematyczna I.1
semestr zimowy 2023/2024
zadania na ćwiczenia, 10 X 2023

Michał Kotowski

Zadanie 1. Załóżmy, że liczby dodatnie x_1, \dots, x_n spełniają $x_1 \cdot \dots \cdot x_n = 1$. Wykazać nierówność

$$x_1 + \dots + x_n \geq n$$

oraz wyjaśnić, kiedy zachodzi równość.

Zadanie 2. Wywnioskować z poprzedniego zadania, że dla dowolnych liczb nieujemnych x_1, \dots, x_n zachodzą nierówności

$$\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot \dots \cdot x_n}$$

oraz

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot \dots \cdot x_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}}$$

Wyjaśnić, kiedy zachodzi równość.

Zadanie 3. Wyznaczyć kresy zbioru

$$G = \{x + y + z \mid x, y, z > 0, xyz = 1\}.$$

Czy są one osiągalne?

Zadanie 4. Wykazać dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ nierówność

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{2}{3}.$$

Zadanie 5. Wykazać dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ nierówność

$$1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 2.$$