# Analiza matematyczna I.1

semestr zimowy 2023/2024

# zadania na ćwiczenia, 25 I 2024

Michał Kotowski

**Zadanie 1.** Rozpatrzmy funkcję $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadaną wzorem

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

(a) Wykazać, że funkcja $f$ jest różniczkowalna w 0.

(b) Podać przykład takich ciągów punktów $x_n \neq y_n$, że $x_n, y_n \neq 0$ i zachodzi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(y_n)}{x_n - y_n} \neq f'(0).$$

**Zadanie 2.** Wykazać, że jeśli $f : A \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w $a \in A$, a $x_n, y_n$ są takimi ciągami punktów, że $x_n < a < y_n$ oraz $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = a$, to

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(y_n)}{x_n - y_n} = f'(a).$$

**Zadanie 3.** Wyznaczyć stałe $a, b, c$ takie, aby funkcja

$$f(x) = \begin{cases} 4x, & x \leqslant 0, \\ ax^2 + bx + c, & x \in (0,1), \\ 3 - 2x, & x \geqslant 1 \end{cases}$$

była różniczkowalna na $\mathbb{R}$.

**Zadanie 4.** Rozpatrzmy funkcję $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadaną wzorem

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \left|\cos \frac{\pi}{x}\right|, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Wykazać, że $f$ nie jest różniczkowalna w $x_n = \frac{2}{2n+1}$, ale jest różniczkowalna w 0.

**Zadanie 5.** Obliczyć sumy:

(a) $\sum_{k=1}^{n} ke^{kx}$, $x \in \mathbb{R}$

(b) $\sum_{k=1}^{n} k\cos(kx)$, $x \in \mathbb{R}$