Analiza matematyczna I.1

semestr zimowy 2023/2024

zadania na ćwiczenia, 11 I 2024

Michał Kotowski

Zadanie 1. Obliczyć dla $|x| < 1$ sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$.

Zadanie 2. Załóżmy, że szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ jest zbieżny i niech $A_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$. Wykazać, że dla $|x| < 1$ szereg $\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n$ jest zbieżny i zachodzi równość

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n.$$

Zadanie 3. Zbadać zbieżność iloczynu Cauchy'ego szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ przez siebie.

Zadanie 4. Zbadać zbieżność iloczynu Cauchy'ego szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(n!)^2}$, $x \in \mathbb{R}$, przez siebie.

Zadanie 5. Wykazać, że zbieżność szeregów $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ implikuje zbieżność ich iloczynu Cauchy'ego wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k (b_n + b_{n-1} + \ldots + b_{n-k+1}) \right) = 0.$$