Analiza matematyczna I.1

semestr zimowy 2023/2024

zadania na ćwiczenia, 9 I 2024

Michał Kotowski

Zadanie 1. Zbadać zbieżność szeregów:

(a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1 + 2\sin\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{9^n}$$

(b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n + \frac{1}{n}} - \sqrt{n - \frac{1}{n}}\right)^{\alpha} x^n, \text{ gdzie } x \in \mathbb{R}, \alpha > 0$$

(c)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\ln(n^a + n^b) - \ln(n^a - n^b)\right), \ a > b > 0$$

Zadanie 2. Załóżmy, że $a_n > 0$ jest ciągiem malejącym, a szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n$, gdzie $\varepsilon_n = \pm 1$, jest zbieżny. Wykazać, że

$$\lim_{n\to\infty} (\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n) a_n = 0.$$

Zadanie 3. Rozpatrzmy ciąg ε_n powstały przez napisanie p razy $+1$, nastepnie q razy -1, p razy $+1$ etc. Wykazać, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{n}$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $p = q$.

Zadanie 4. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{1}{n}.$$

Zadanie 5. Zbadać zbieżność szeregu

$$1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots$$

powstałego przez branie na przemian dwóch dodatnich i jednego ujemnego wyrazu szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$.