Analiza matematyczna I.1
semestr zimowy 2023/2024
zadania na ćwiczenia, 21 XII 2023

Michał Kotowski

Zadanie 1. Niech a_n będzie ciągiem zbieżnym do 0. Definiujemy $l_1 = 1$ oraz $l_j = \min\{i > l_{j-1} : a_i a_{i+1} < 0\}$ dla $j \geqslant 2$. Niech $A_n = \sum_{k=j_n}^{j_{n+1}-1} a_k$ (innymi słowy, grupujemy wyrazy szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o tym samym znaku). Wykazać, że jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ jest zbieżny, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ również jest zbieżny.

Zadanie 2. Zbadać zbieżność oraz bezwzględną zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazie ogólnym:

(a) $a_n = \frac{(-1)^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor}}{n}$

(b) $a_n = \frac{(-1)^{\lfloor \log_2 n \rfloor}}{n}$

(c) $a_n = (-1)^n \frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\ln n}$

(d) $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^{n-1}}$

(e) $a_n = (-1)^n \frac{\sqrt[n]{a}}{n}$, $a > 1$

Zadanie 3. Zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazie ogólnym:

(a) $a_n = (-1)^n \frac{\sin^2 n}{n}$

(b) $a_n = \frac{\sin n}{n} \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + n\right)$

Zadanie 4. Wykazać, że jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ jest zbieżny dla $|x| < 1$.

Zadanie 5. Wykazać, że jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{x_0}}$ jest zbieżny dla pewnego x_0, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ jest zbieżny dla dowolnego $x > x_0$.

Zadanie 6. Wykazać, że jeśli ciąg a_n jest ograniczony, to szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{\sqrt{n}}$$

jest zbieżny.