

Analiza matematyczna I.1
semestr zimowy 2023/2024
zadania na ćwiczenia, 19 XII 2023

Michał Kotowski

Zadanie 1. Zbadać zbieżność oraz bezwzględną zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazie ogólnym:

(a) $a_n = \left(\frac{an}{n+1}\right)^n, a \in \mathbb{R}$

(b) $a_n = \frac{n^n}{a^{n^2}}, a \neq 0$

(c) $a_n = (-1)^n (\sqrt[n]{a} - 1), a > 1$

(d) $a_n = (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

(e) $a_n = (-1)^n \frac{2^{n!}}{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot \dots \cdot (2n+3)}$

(f) $a_n = \frac{c + (-1)^n}{n^2(3^n - n)}, c \in \mathbb{R}$

(g) $a_n = (-1)^n \frac{n}{n^2 + 1000}$

Zadanie 2. Podać przykład ciągów $a_n, b_n \neq 0$ takich, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$, ale zbieżność szeregu $\sum_n a_n$ nie implikuje zbieżności szeregu $\sum_n b_n$.

Zadanie 3. Zbadać zbieżność szeregów

(a) $\frac{1}{1} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \dots$

(b) $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{8}} + \dots$