Analiza matematyczna I.1

semestr zimowy 2023/2024

zadania na ćwiczenia, 14 XII 2023

Michał Kotowski

Zadanie 1. Niech a_n będzie ciągiem o wyrazach dodatnich takim, że

$$\lim_{n\to\infty} n \ln \frac{a_n}{a_{n+1}} = g,$$

przy czym dopuszczamy $g = \pm\infty$. Wykazać, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, jeśli $g > 1$, natomiast jest rozbieżny dla $g < 1$. Podać przykłady, że dla $g = 1$ szereg może być zarówno zbieżny, jak i rozbieżny.

Zadanie 2. Zbadać zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ dla

$$a_n = a^{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}},$$

gdzie $a > 0$.

Zadanie 3. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(a+1)(a+2)\cdot\ldots\cdot(a+n)}$$

w zależności od $a \geqslant -1$.

Zadanie 4. Zbadać zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ dla

(a) $a_n = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{1}{2n+1}$

(b) $a_n = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{4n+3}{2n+2}$

(c) $a_n = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}$

Zadanie 5. Niech $\mathcal{A}$ oznacza zbiór liczb, w których zapisie dziesiętnym nie występuje cyfra 9. Wykazać, że szereg $\sum\limits_{n\in\mathcal{A}} \frac{1}{n}$ jest zbieżny.