Analiza matematyczna I.1

semestr zimowy 2023/2024

zadania na ćwiczenia, 5 XII 2023

Michał Kotowski

Zadanie 1. Dla funkcji $f : A \to \mathbb{R}$ i $\delta > 0$ określamy

$$\omega_f(\delta) = \sup \{ |f(x) - f(y)| \,:\, x, y \in A, |x - y| < \delta \} .$$

Wykazać, że f jest jednostajnie ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim_{\delta \to 0^+} \omega_f(\delta) = 0$.

Zadanie 2. Wyznaczyć $\omega_f(\delta)$ dla $f(x) = \sqrt{x}$ i $A = [0, +\infty)$. Jak zmieni się odpowiedź, jeśli będziemy rozpatrywać $A = [x_0, +\infty)$ dla ustalonego $x_0 > 0$?

Zadanie 3. Załóżmy, że $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ jest jednostajnie ciągła. Wykazać, że istnieje $M > 0$ takie, że $\frac{|f(x)|}{x} \leqslant M$ dla każdego $x \geqslant 1$.

Zadanie 4. Powiemy, że $f : A \to \mathbb{R}$ spełnia *warunek Höldera z wykładnikiem* α, jeżeli dla pewnej stałej $C > 0$ i dla wszystkich $x, y \in A$ zachodzi

$$|f(x) - f(y)| \leqslant C|x - y|^\alpha.$$

(a) Wykazać, że jeśli f spełnia warunek Höldera z wykładnikiem α, gdzie $\alpha \in (0, 1)$, to f jest jednostajnie ciągła.

(b) Sprawdzić, że $f(x) = x^\alpha$, gdzie $\alpha \in (0, 1)$, spełnia warunek Höldera z wykładnikiem α na $[0, +\infty)$.

Zadanie 5. Wyznaczyć największe $\alpha \in (0, 1)$, dla którego funkcja $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dana wzorem $f(x) = \sin \sqrt{x}$ spełnia warunek Höldera z wykładnikiem α. Wykazać, że f nie spełnia warunku Lipschitza z żadną stałą (w szczególności jest to funkcja jednostajnie ciągła i ograniczona, które nie jest lipschitzowska).