

Analiza matematyczna I.1  
semestr zimowy 2023/2024  
zadania na ćwiczenia, 30 XI 2023

Michał Kotowski

**Zadanie 1.** Niech  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  będzie funkcją ciągłą spełniającą

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f\left(x + \frac{1}{3}\right) + f\left(x + \frac{2}{3}\right)}{x} = 1.$$

Wykazać, że  $f(x_0) = 0$  dla pewnego  $x_0 \in [0, 1]$ .

**Zadanie 2.** Niech  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  będzie funkcją ciągłą. Dla  $x \in (-1, 1]$  określamy

$$g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x^n).$$

Wykazać, że  $g$  jest funkcją ciągłą wtedy i tylko wtedy, gdy  $f(0) = f(1)$ .

**Zadanie 3.** Załóżmy, że  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  jest funkcją ciągłą w co najmniej jednym punkcie i spełniającą dla dowolnych  $x, y \in \mathbb{R}$  równanie  $f(x+y) = f(x) + f(y)$ . Wykazać, że  $f(x) = ax$  dla pewnego  $a \in \mathbb{R}$ .

**Zadanie 4.** Zbadać jednostajną ciągłość następujących funkcji na przedziale  $(0, 1)$ :

(a)  $f(x) = e^x$

(b)  $f(x) = \sin \frac{1}{x}$

(c)  $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$

(d)  $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

(e)  $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$

(f)  $f(x) = \ln x$

**Zadanie 5.** Zbadać jednostajną ciągłość następujących funkcji na przedziale  $[0, \infty)$ :

(a)  $f(x) = x \sin x$

(b)  $f(x) = \sin x^2$

(c)  $f(x) = \sin(\sin x)$

**Zadanie 6.** Niech  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  będzie funkcją ciągłą taką, że  $f(x) = \frac{\sin x^2}{x}$  dla  $x > 0$ . Wyznaczyć wartość  $f(0)$ , a następnie zbadać jednostajną ciągłość funkcji  $f$  na przedziale  $[0, 1)$  oraz  $[0, \infty)$ .