Analiza matematyczna I.1

semestr zimowy 2023/2024

zadania na ćwiczenia, 28 XI 2023

Michał Kotowski

Zadanie 1. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą, która jest jednocześnie T_1-okresowa i T_2-okresowa, przy czym $\frac{T_1}{T_2} \notin \mathbb{Q}$. Wykazać, że wówczas f jest funkcją stałą.

Zadanie 2. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą, a x_n ciągiem ograniczonym. Wykazać nierówności

$$\liminf_{n\to\infty} f(x_n) \leqslant f(\liminf_{n\to\infty} x_n)$$
$$\limsup_{n\to\infty} f(x_n) \geqslant f(\limsup_{n\to\infty} x_n)$$

i podać przykład, że mogą być one ostre.

Zadanie 3. Dla $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ i $\delta > 0$ definiujemy

$$\omega_f(x_0, \delta) = \sup \left\{ |f(x) - f(x_0)| \,:\, x \in \mathbb{R}, |x - x_0| < \delta \right\}.$$

Wykazać, że f jest ciągła w x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim\limits_{\delta\to 0^+} \omega_f(x_0, \delta) = 0$.

Zadanie 4. Niech $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą, która nie jest ograniczona z góry ani z dołu. Wykazać, że f przyjmuje każdą wartość $x \in \mathbb{R}$ nieskończenie wiele razy.

Zadanie 5. Niech $f : [0, 1] \to [0, 1]$ będzie funkcją ciągłą. Wykazać, że f posiada punkt stały, tj. istnieje takie $x_0 \in [0, 1]$, że $f(x_0) = x_0$.

Zadanie 6. Niech $f : [-1, 1] \to (0, 1]$ będzie funkcją ciągłą. Wykazać, że równanie $f(x) = x^4$ posiada co najmniej dwa rozwiązania.