Analiza matematyczna I.1

semestr zimowy 2023/2024

zadania na ćwiczenia, 23 XI 2023

Michał Kotowski

Zadanie 1. Rozpatrzmy funkcję $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ określoną wzorem

$$f(x) = \begin{cases} (1+ax)^{\frac{1}{x}}, & x > 0 \\ \frac{1-\cos ax}{x^2}, & x < 0 \\ b, & x = 0, \end{cases}$$

gdzie $a, b \in \mathbb{R}$. Wykazać, że można dobrać takie wartości a, b, aby funkcja f była ciągła.

Zadanie 2. Znaleźć wszystkie trójki $a, b, c \in \mathbb{R}$, dla których funkcja

$$g(x) = \begin{cases} (1-2x)^{\frac{a}{x}}, & x < 0 \\ \frac{\sin\sqrt{x^2+cx}}{x}, & x > 0 \\ b, & x = 0, \end{cases}$$

jest ciągła we wszystkich punktach $x \in \mathbb{R}$.

Zadanie 3. Zbadać ciągłość funkcji $f(x) = \lfloor x^2 \rfloor \sin \pi x$ dla $x \in \mathbb{R}$.

Zadanie 4. Zbadać ciągłość funkcji

(a)

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^x - n^{-x}}{n^x + n^{-x}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

(b)

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(e^n + x^n)}{n}, \quad x \geqslant 0$$

(c)

$$h(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{4^n + x^{2n} + \frac{1}{x^{2n}}}, \quad x \neq 0$$

Zadanie 5. Załóżmy, że $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą. Wykazać, że funkcje

$$m(x) = \inf\{f(u) \mid u \in [0,x]\},$$
$$M(x) = \inf\{f(u) \mid u \in [0,x]\}$$

również są ciągłe na $[0,1]$.