Analiza Matematyczna I.1, semestr zimowy 2016 - zadania domowe, seria 8 (dodatkowa)

Michał Kotowski

20 stycznia 2017

Chętni powinni zadania rozwiązać pisemnie i oddać na ćwiczeniach (lub wysłać mailem na adres michal.kotowski1@gmail.com) do piątku **27 stycznia**.

Zadanie 1. Wyznaczyć granicę:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{a} \left\lfloor \frac{b}{x} \right\rfloor$$

gdzie $a, b > 0$.

Zadanie 2. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą i okresową o okresie $T > 0$. Pokazać, że istnieje takie $x_0 \in \mathbb{R}$, że:

$$f\left(x_0 + \frac{T}{2}\right) = f(x_0)$$

Zadanie 3. Obliczyć granicę:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^{1/m} - 1}{x^{1/n} - 1}$$

gdzie $m, n \in \mathbb{N}$.

Zadanie 4. Załóżmy, że $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ jest jednostajnie ciągła. Pokazać, że istnieje takie $M > 0$, że:

$$|f(x)| \leqslant Mx$$

dla każdego $x \geqslant 1$.

Zadanie 5. Załóżmy, że funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełnia dla dowolnych x, y własność:

$$|f(x) - f(y)| \leqslant C|x - y|^{\alpha}$$

gdzie $C > 0$ i $\alpha > 1$. Pokazać, że f jest funkcją stałą.