Analiza Matematyczna I.1, semestr zimowy 2016 - zadania domowe, seria 7

Michał Kotowski

17 stycznia 2017

Zadania należy rozwiązać pisemnie i oddać na ćwiczeniach (lub wysłać mailem na adres michal.kotowski1@gmail.com) do wtorku **24 stycznia**.

Zadanie 1. Znaleźć wszystkie punkty ciągłości funkcji $f : \mathbb{R} \setminus \{1/2, 1\} \to \mathbb{R}$ określonej wzorem:

$$f(x) = \frac{\lfloor x \rfloor}{2x^2 - 3x + 1}$$

Zadanie 2. Niech $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Udowodnić, że funkcja $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ określona wzorem:

$$g(x) = \sup\{f(t) : t \in [0, x]\}$$

jest ciągła.

Zadanie 3. Rozstrzygnąć, czy funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

jest jednostajnie ciągła.

Zadanie 4. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą w 0, spełniającą dodatkowo warunek $f(0) = 0$ oraz:

$$f(x + y) \leqslant f(x) + f(y)$$

dla każdych $x, y \in \mathbb{R}$. Pokazać, że f jest jednostajnie ciągła.

Zadanie 5. Załóżmy, że funkcja $f : [-1, 1] \to (0, 1]$ jest ciągła. Pokazać, że równanie $f(x) = x^4$ posiada co najmniej dwa rozwiązania.