Analiza Matematyczna I.1, semestr zimowy 2016 - zadania domowe, seria 6

Michał Kotowski

15 grudnia 2016

Zadania należy rozwiązać pisemnie i oddać na ćwiczeniach (lub wysłać mailem na adres michal.kotowski1@gmail.com) do czwartku **22 grudnia**.

Zadanie 1. Niech $\sum a_n$ będzie szeregiem rozbieżnym o wyrazach dodatnich. Niech $S_N = \sum\limits_{n=1}^{N} a_n$ oznacza N-tą sumę częściową tego szeregu.

(a) Udowodnić, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n}$ jest rozbieżny.

(b) Udowodnić, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^2}$ jest zbieżny.

Wskazówka: zbadać warunek Cauchy'ego dla każdego z powyższych szeregów.

Zadanie 2. Udowodnić, że jeżeli szereg $\sum a_n^2$ jest zbieżny, to szereg $\sum \frac{a_n}{n}$ jest zbieżny bezwzględnie.

Zadanie 3. Obliczyć sumę szeregu:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2} x^n$$

gdzie $|x| < 1$.

Zadanie 4. Zbadać zbieżność szeregu:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n} \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right)$$