Analiza Matematyczna I.1, semestr zimowy 2016 - zadania domowe, seria 5

Michał Kotowski

6 grudnia 2016

Zadania należy rozwiązać pisemnie i oddać na ćwiczeniach (lub wysłać mailem na adres michal.kotowski1@gmail.com) do wtorku **13 grudnia**.

Zadanie 1. Udowodnić, że jeżeli $a_n \to g \in \mathbb{R}$, to:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-j}a_j\right) = 3g$$

Zadanie 2. Zbadać zbieżność szeregu:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\frac{1}{n}}{n\sqrt[n]{3^n+n^5 5^n}}$$

Zadanie 3. Niech A będzie zbiorem tych liczb naturalnych, które w zapisie dziesiętnym nie mają cyfry 9. Udowodnić, że szereg:

$$\sum_{n\in A}\frac{1}{n}$$

jest zbieżny. Wskazówka: ile jest liczb N-cyfrowych w zbiorze A?

Zadanie 4. Zbadać zbieżność szeregu:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^2+7}-\sqrt[3]{n^3+8n+1}\right)(\ln(n+1)-\ln n)$$

Zadanie 5. Zbadać zbieżność szeregu:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\frac{1}{n+\sqrt{n}}$$

Zadanie 6. Przypuśćmy, że $a_n \geqslant 0$ i szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny. Pokazać, że wówczas szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n a_{n+1}}$ również jest zbieżny, i podać przykład, że nie zachodzi przeciwna implikacja. Udowodnić, że przeciwna implikacja jest prawdziwa, jeśli założymy dodatkowo, że ciag a_n jest ściśle malejący.