Analiza Matematyczna I.1, semestr zimowy 2016 - zadania domowe, seria 4

Michał Kotowski

19 listopada 2016

Zadania należy rozwiązać pisemnie i oddać na ćwiczeniach (lub wysłać mailem na adres michal.kotowski1@gmail.com) do wtorku **29 listopada**.

Zadanie 1. Rozpatrzmy ciąg a_n zdefiniowany rekurencyjnie:

$$a_{n+1} = a_n(1 - a_n)$$

dla $n \geqslant 1$, gdzie $a_1 \in (0, 1)$. Udowodnić, że:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(1 - na_n)}{\ln n} = 1$$

Zadanie 2. Udowodnić, że jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = k$ dla pewnego naturalnego k, to:

$$\lim_{n\to\infty} (1 + a_n)^n = e^k$$

Zadanie 3. Niech $c > 0$ będzie liczbą rzeczywistą. Obliczyć granicę:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{e^{cn} + (ec)^n}$$

Zadanie 4. Obliczyć granicę:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$$

Zadanie 5. Obliczyć granicę:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n}\right)$$

Zadanie 6. Obliczyć granice:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{[(n+1)(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+n)]^{1/n}}$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n!)^{1/n}}{n}$