Analiza Matematyczna I.1, semestr zimowy 2016 - zadania domowe, seria 3

Michał Kotowski

28 października 2016

Zadania należy rozwiązać pisemnie i oddać na ćwiczeniach (lub wysłać mailem na adres michal.kotowski1@gmail.com) do piątku **4 listopada**.

Zadanie 1. Zbadać zbieżność ciągów:

(a) $a_n = \frac{n}{2^{\sqrt{n}}}$

(b) $a_n = \frac{n!}{2^{n^2}}$

Zadanie 2. Niech a_n będzie ciągiem ściśle dodatnim i zbieżnym do 0. Dla $p \geqslant 2$ naturalnego obliczyć granicę:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[p]{1+a_n}-1}{a_n}$$

Zadanie 3. Dany jest ciąg a_n zdefiniowany rekurencyjnie:

$$a_{n+1} = a_n^2 - 1$$

dla $n \geqslant 1$. Udowodnić, że jeśli $|a_1| \leqslant \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, to ciąg a_n jest ograniczony, a jeśli $|a_1| > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, to jest rozbieżny do $+\infty$.

Zadanie 4. Załóżmy, że a_n jest ciągiem takim, że:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q$$

Udowodić, że jeśli $q < 1$, to a_n zbiega do 0, a jeśli $q > 1$, to $|a_n|$ jest rozbieżny do $+\infty$.

Zadanie 5. Obliczyć granicę:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}}\right)$$

Zadanie 6. Zbadać zbieżność ciągu a_n zdefiniowanego dla $n \geqslant 0$ rekurencyjnie:

$$a_{n+1} = a_n^3 + a_n^2 + a_n$$

w zależności od wartości a_0.