Analiza Matematyczna I.1, semestr zimowy 2016 - zadania domowe, seria 2

Michał Kotowski

21 października 2016

Zadania należy rozwiązać pisemnie i oddać na ćwiczeniach (lub wysłać mailem na adres michal.kotowski1@gmail.com) do piątku **28 października**.

Zadanie 1. Niech $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$. Udowodnić, że liczba H_n nie jest całkowita dla żadnego $n \geqslant 2$.

Zadanie 2. Załóżmy, że $A \subseteq \mathbb{R}$ jest niepustym i ograniczonym z dołu zbiorem o tej własności, że dla każdego $a \in A$ istnieje $b \in A$ takie, że $b \leqslant \frac{a}{2} + 1$. Udowodnić, że $\inf A \leqslant 2$.

Zadanie 3. Wyznaczyć kres dolny i kres górny zbioru:

$$A = \left\{ \frac{1}{k} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m} : k, l, m \in \mathbb{N} \right\}$$

Rozstrzygnąć, czy kresy te są osiągane w zbiorze A.

Zadanie 4. Udowodnić, że liczba $\sqrt{n^2 + 3n}$ jest niewymierna dla każdego naturalnego $n \geqslant 2$.

Zadanie 5. Dla liczby rzeczywistej α określamy ciąg:

$$S(\alpha) = (\lfloor \alpha \rfloor, \lfloor 2\alpha \rfloor, \lfloor 3\alpha \rfloor, \ldots)$$

(a) Udowodnić, że jeśli $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ i $\alpha \neq \beta$, to $S(\alpha) \neq S(\beta)$.

(b) Udowodnić, że każda liczba naturalna wystąpi w dokładnie jednym z ciągów $S(\sqrt{2})$ lub $S(2 + \sqrt{2})$ (ale nie w obu naraz). Dla ilustracji:

$$S(\sqrt{2}) = (1, 2, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 14, 15, 16, 18, 19, 21, 22, 24, \ldots)$$
$$S(2 + \sqrt{2}) = (3, 6, 10, 13, 17, 20, 23, 27, \ldots)$$

Wskazówka: dla ustalonego n policzyć, ile w każdym z ciągów jest różnych wyrazów nie większych niż n.