Analiza Matematyczna I.1, semestr zimowy 2016 - zadania domowe, seria 1

Michał Kotowski

11 października 2016

Zadania należy rozwiązać pisemnie i oddać na ćwiczeniach (lub wysłać mailem na adres michal.kotowski1@gmail.com) do wtorku **18 października**.

Zadanie 1.

Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 1$ zachodzi wzór:

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2$$

Zadanie 2.

Niech $m_1, \ldots, m_n$ będą liczbami rzeczywistymi nieujemnymi takimi, że $m_1 + \ldots + m_n = 1$. Udowodnić, że jeśli $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ są rzeczywiste nieujemne oraz $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n$, $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_n$, to zachodzi nierówność:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i a_i b_i \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} m_i a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} m_i b_i\right)$$

Zadanie 3.

Niech $x \neq 1$ będzie liczbą rzeczywistą. Obliczyć wartość sumy:

$$\sum_{k=0}^{n} k x^k$$

Zadanie 4.

Udowodnić, że dla każdego naturalnego $n \geqslant 1$ zachodzi nierówność:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{3n+1} > 1$$

Zadanie 5.

Niech $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$, dla $n \geqslant 1$ (dla $n = 0$ przyjmujemy $0! = 1$). Udowodnić dla każdego naturalnego $n \geqslant 1$ oszacowanie:

$$n^{n/2} \leqslant n! \leqslant \frac{(n+1)^n}{2^n}$$

Wskazówka: dla jakiego k wyrażenie $k(n-k+1)$ jest największe, jeśli $1 \leqslant k \leqslant n$?