Analiza Matematyczna I.2, semestr letni 2016/2017 - zadania domowe, seria 9

Michał Kotowski

30 maja 2017

Zadania należy rozwiązać pisemnie i oddać na ćwiczeniach (lub wysłać mailem na adres michal.kotowski1@gmail.com) do wtorku **6 czerwca**.

Zadanie 1. Obliczyć całki:

(a) $\displaystyle\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\,\mathrm{d}x$,

(b) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos x}$.

Zadanie 2. Niech $a > 0$. Pokazać, że dla dowolnej funkcji ciągłej $f\colon [0,a] \to \mathbb{R}$ zachodzi równość

$$\int\limits_0^a x^3 f(x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\limits_0^{a^2} x f(x)\,\mathrm{d}x$$

Zadanie 3. Obliczyć pole figury ograniczonej pętlą linii o równaniu:

(a) $y^2 = x(x-1)^2$,

(b) $(y - \arcsin x)^2 = x - x^2$.

Zadanie 4. Obliczyć

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\ln 2 - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \ldots - \frac{1}{2n}\right).$$

Wskazówka. Rozważyć sumy całkowe Riemanna na $[0,1]$ dla funkcji $f(x) = (1+x)^{-1}$.

Zadanie 5. Niech $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ i załóżmy, że $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ jest funkcją klasy C^1 (tj. różniczkowalną w sposób ciągły) na $[a,b]$. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ określmy

$$\Delta_n = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{b-a}{n}\sum_{j=1}^{n} f\Big(a + j\frac{b-a}{n}\Big).$$

Obliczyć $\lim_{n\to\infty} n\Delta_n$.

Wskazówka. Rozważyć całki po przedziałach $[a+(j-1)(b-a)/n, a+j(b-a)/n]$ i w każdym z nich zastosować twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej.