Analiza Matematyczna I.2, semestr letni 2016/2017 - zadania domowe, seria 7

Michał Kotowski

9 maja 2017

Zadania należy rozwiązać pisemnie i oddać na ćwiczeniach (lub wysłać mailem na adres michal.kotowski1@gmail.com) do wtorku **16 maja**.

Zadanie 1. Ciąg $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ dany jest rekurencyjnie wzorami:

$$\begin{cases} a_0 = 2, \ \ a_1 = 0, \ \ a_2 = -2 \\ a_{n+3} = 6a_{n+2} - 11a_{n+1} + 6a_n \ \ (n \geqslant 0). \end{cases}$$

Posługując się funkcją tworzącą tego ciągu (tj. szeregiem potęgowym $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$), wyprowadzić wzór ogólny na a_n.

Zadanie 2. Rozwinąć funkcję $f(x) = \operatorname{arctg} x$ w szereg Taylora w otoczeniu zera i określić promień zbieżności tego szeregu.

Zadanie 3. Wykazać, że:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

Zadanie 4. Funkcja $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dana jest jako szereg potęgowy:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-2)!} x^{2k}.$$

Znaleźć wzór zwarty (tj. nieangażujący nieskończonego sumowania) na $f(x)$.
Wskazówka. Obliczyć $f'(x)$ i wyprowadzić równanie różniczkowe, które spełnia funkcja f. Pomnożyć je stronami przez e^{x^2}.

Zadanie 5. Dowieść, że funkcja $\zeta \colon (1, \infty) \to \mathbb{R}$ określona wzorem:

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

jest funkcją klasy $\mathcal{C}^{\infty}(1, \infty)$, tj. jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna na $(1, \infty)$.