Analiza Matematyczna I.2, semestr letni 2016/2017 - zadania domowe, seria 6

Michał Kotowski

27 kwietnia 2017

Zadania należy rozwiązać pisemnie i oddać na ćwiczeniach (lub wysłać mailem na adres michal.kotowski1@gmail.com) do wtorku **9 maja**.

Zadanie 1. Rozstrzygnąć, czy szereg:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\left(1+(x-n)^2\right)}$$

jest zbieżny jednostajnie na $(0, \infty)$.

Zadanie 2. Obliczyć sumę szeregu:

(a)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n(n+1)}{n!}$$

(b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n-1)}$$

Zadanie 3. Dowieść, że jeżeli $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna oraz istnieje takie $c > 0$, że $|f^{(n)}(x)| \leqslant c^n$ dla każdego $x \in (0,1)$ i $n \in \mathbb{N}$, to dla każdego $x, x_0 \in (0,1)$ zachodzi równość:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Zadanie 4. Niech ciąg C_n określony będzie wzorem rekurencyjnym:

$$C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}$$

z $C_0 = 1$. Rozważając szereg $F(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n x^n$ wyznaczyć jawny wzór na C_n. *Wskazówka:* mnożenie szeregów i uogólniony wzór dwumianowy.

Zadanie 5. Rozwinąć funkcje w szereg Taylora wokół 0 i określić promień zbieżności otrzymanego szeregu:

(a)
$$f(x) = \frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

(b)
$$f(x) = x \arcsin x - \sqrt{1-x^2}$$