Analiza Matematyczna I.2, semestr letni 2016/2017 - zadania domowe, seria 5

Michał Kotowski

20 kwietnia 2017

Zadania należy rozwiązać pisemnie i oddać na ćwiczeniach (lub wysłać mailem na adres michal.kotowski1@gmail.com) do piątku **28 kwietnia**.

Zadanie 1. Rozstrzygnąć, czy istnieje ciąg wielomianów jednostajnie zbieżny na $\mathbb{R}$ do funkcji $f(x) = \sin x$.

Zadanie 2. Ciąg funkcyjny (f_n) określony jest wzorem:

$$f_n(x) = n^2\Big(1 - \cos\sqrt{x^2 + 1 + 4\pi^2 n^2}\Big) \quad \text{dla } x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}.$$

(a) Znaleźć granicę punktową ciągu (f_n).

(b) Wykazać, że ciąg (f_n) nie jest zbieżny jednostajnie na $\mathbb{R}$.

Wskazówka. W rozwiązaniu zadania (b) można wykorzystać nierówność $\cos\alpha \geqslant 1 - \alpha^2/2$.

Zadanie 3. Rozstrzygnąć, czy szereg funkcyjny:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{x^2}{n(\ln n)^2}\right)$$

jest zbieżny, i czy jest zbieżny jednostajnie:

(a) na przedziale postaci $(-a, a)$, gdzie $a \in \mathbb{R}$,

(b) na całej prostej $\mathbb{R}$.

Zadanie 4. Wyznaczyć zbiór punktów zbieżności szeregu potęgowego:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Big(e + (-2)^n + (-1)^n\Big)^n x^n.$$

Zadanie 5. Pokazać, że dla każdego $\alpha > 1$ funkcja $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ określona jako szereg funkcyjny:

$$f_n(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha + \sin x}$$

jest różniczkowalna.