Analiza Matematyczna I.2, semestr letni 2016/2017 - zadania domowe, seria 4

Michał Kotowski

4 kwietnia 2017

Zadania należy rozwiązać pisemnie i oddać na ćwiczeniach (lub wysłać mailem na adres michal.kotowski1@gmail.com) do wtorku **11 kwietnia**.

Zadanie 1. Funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w zerze, przy czym $f'(0) \neq 0$. Załóżmy, że istnieją stałe $a, b \in \mathbb{R}$ takie, że $0 \neq |a| \neq 1$ oraz $f(ax) = bf(x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Wykazać, że f jest postaci $f(x) = cx$ dla pewnej stałej $c \in \mathbb{R}$.

Zadanie 2. Rozwinąć funkcję $x \mapsto \arcsin x$ w szereg Maclaurina. Wykazać, że szereg ten jest zbieżny i przedstawia daną funkcję dla $|x| < 1$.

Zadanie 3. Wyznaczyć maksimum globalne funkcji $f\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$ określonej wzorem:

$$f(x) = \ln x - \frac{x}{3}.$$

Następnie korzystając z tego obliczenia wykazać, że dla dowolnych liczb dodatnich $x_1, \ldots, x_n$ zachodzi nierówność:

$$\prod_{k=1}^{n} x_k \leqslant \left(\frac{3}{\mathrm{e}}\right)^n \exp\left(\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} x_k\right).$$

Zadanie 4. Określmy $f_n\colon [0, \pi] \to \mathbb{R}$ wzorem $f_n(x) = (\sin x)^n$ dla $n \in \mathbb{N}$. Na jakich przedziałach $I \subseteq [0, \pi]$ ciąg funkcyjny (f_n) jest zbieżny jednostajnie do swojej funkcji granicznej?

Zadanie 5. Określmy $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wzorem $f_n(x) = nx \sin \dfrac{x}{n}$. Wyznaczyć funkcję graniczną ciągu (f_n). Rozstrzygnąć, czy ciąg ten jest zbieżny jednostajnie:

(a) na przedziale postaci $[0, a]$, gdzie $a > 0$,

(b) na półprostej $[0, \infty)$,

(c) na całej prostej $\mathbb{R}$.