Analiza Matematyczna I.2, semestr letni 2016/2017 - zadania domowe, seria 3

Michał Kotowski

21 marca 2017

Zadania należy rozwiązać pisemnie i oddać na ćwiczeniach (lub wysłać mailem na adres michal.kotowski1@gmail.com) do wtorku **28 marca**.

Zadanie 1. Znaleźć granice:

(a) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$

(b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)$

(c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\operatorname{tg} x}-e^x}{\operatorname{tg} x - x}$

Zadanie 2. Zbadać przebieg zmienności funkcji $f\colon \mathbb{R}\backslash\{0\}\to\mathbb{R}$ określonej wzorem:

$$f(x) = (10x - x^2)e^{\frac{1}{x}}$$

Zadanie 3. Dla $a, c\in\mathbb{R}$, $c>0$, rozpatrujemy funkcję $f\colon [-1,1]\to\mathbb{R}$ daną wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} x^a \sin\left(|x|^{-c}\right), & x\neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Zbadać istnienie oraz ciągłość pierwszej i drugiej pochodnej funkcji f w zależności od parametrów a i c.

Zadanie 4. Niech $f\colon (a,b)\to\mathbb{R}$ będzie funkcją dwukrotnie różniczkowalną, której druga pochodna jest ciągła. Dla $c\in(a,b)$ udowodnić, że:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-2f(c)+f(c-h)}{h^2} = f''(c)$$

Czy powyższa granica może istnieć w przypadku, kiedy f nie ma drugiej pochodnej w punkcie c?

Zadanie 5. Załóżmy, że $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest funkcją dwukrotnie różniczkowalną spełniającą równanie $f''(x) = f(x)$ dla każdego $x\in\mathbb{R}$. Wykazać, że istnieją takie $a, b\in\mathbb{R}$, że $f(x) = ae^x + be^{-x}$.