Analiza Matematyczna I.2, semestr letni 2016/2017 - zadania domowe, seria 2

Michał Kotowski

17 marca 2017

Zadania należy rozwiązać pisemnie i oddać na ćwiczeniach (lub wysłać mailem na adres michal.kotowski1@gmail.com) do wtorku **21 marca**.

Zadanie 1. Załóżmy, że $f\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$ jest funkcją jednostajnie ciągłą. Czy wynika stąd, że:

$$\limsup_{x\to+\infty} \frac{f(2x)}{f(x)}$$

jest liczbą skończoną?

Zadanie 2. Niech $k \in \mathbb{N}$ będzie liczbą nieparzystą, $k < 2017$. W zależności od parametru $c \in \mathbb{R}$ zbadać liczbę dodatnich miejsc zerowych funkcji $f(x) = x^{2017} + x^k + c$.

Zadanie 3. Załóżmy, że I jest przedziałem otwartym zawierającym 0, a funkcja $f\colon I \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna oraz $f(0) = 0$. Obliczyć:

$$\lim_{x\to 0} \lim_{y\to x} \frac{y^2 f(x) - x^2 f(y)}{(1-\cos x)\sin(x-y)}.$$

Zadanie 4. Funkcja $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ określona jest wzorem:

$$f(t) = t^2 + \alpha t + \sqrt{t},$$

gdzie $\alpha > 0$ jest parametrem. Niech $g\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ będzie największą funkcją wypukłą spełniającą warunek $g(t) \leqslant f(t)$ dla $t \geqslant 0$ (tj. taką funkcją wypukłą, że dla każdej innej funkcji wypukłej $h\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ spełniającej $h(t) \leqslant f(t)$ dla $t \geqslant 0$ mamy $h(t) \leqslant g(t)$ dla $t \geqslant 0$). Udowodnić, że istnieje takie $a \geqslant 0$, niezależne od parametru α, że $f(a) = g(a)$.

Zadanie 5. Niech $f\colon [0,1] \to [0,1]$ będzie funkcją ciągłą spełniającą warunki $f(0) = 0$ i $f(1) = 1$ i załóżmy, że pochodna lewostronna $f'_-(x)$ istnieje w każdym punkcie $x \in (0,1)$. Wykazać, że istnieje takie $x_0 \in (0,1)$, że $f'_-(x_0) \geqslant 1$.