# Analiza Matematyczna I.2, semestr letni 2016/2017 - zadania domowe, seria 10

Michał Kotowski

8 czerwca 2017

Zadania należy rozwiązać pisemnie i oddać na ćwiczeniach (lub wysłać mailem na adres michal.kotowski1@gmail.com) do wtorku **13 czerwca**.

**Zadanie 1.** Zbadać, dla jakich wartości wykładnika $c \in \mathbb{R}$ całka niewłaściwa jest zbieżna:

$$\int_1^\infty \left(\frac{x}{\ln x}\right)^c \frac{1}{1+x^{4c}}\, dx$$

**Zadanie 2.** Niech $f\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ będzie funkcją malejącą taką, że:

$$\int_0^\infty f(x)\, dx < \infty$$

Wykazać, że:

$$\lim_{x\to\infty} x f(x) = 0$$

Podać przykład wskazujący, że powyższa granica może być równa 0 także w sytuacji, gdy całka z $f$ jest rozbieżna.

**Zadanie 3.** Niech $f\colon [0,\infty] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą o wartościach dodatnich. Wykazać, że dla każdego $x > 0$ prawdziwa jest nierówność:

$$\left(\int_0^x t^2 f(t)\, dt\right)\left(\int_0^x f(t)\, dt\right) \geqslant \left(\int_0^x t f(t)\, dt\right)^2$$

*Wskazówka*: zróżniczkować obie strony względem $x$.

**Zadanie 4.** Podać przykład funkcji $f\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ takiej, że $f$ jest ściśle malejąca oraz:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \ldots + f\left(\frac{n-1}{n}\right)}{n} = 0$$

ale całka $\int_0^1 f(x)\, dx$ jest rozbieżna.