Analiza Matematyczna I.2, semestr letni 2016/2017 - zadania domowe, seria 1

Michał Kotowski

6 marca 2017

Zadania należy rozwiązać pisemnie i oddać na ćwiczeniach (lub wysłać mailem na adres michal.kotowski1@gmail.com) do wtorku **14 marca**.

Zadanie 1. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją wypukłą niemalejącą, a $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcją wypukłą. Udowodnić, że $h(x) = f(g(x))$ również jest funkcją wypukłą. Podać przykład pokazujący, że założenia o niemalejącości nie można opuścić.

Zadanie 2. Załóżmy, że $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągła na $[0,1]$ i różniczkowalną na $(0,1)$ oraz $f(0) = f(1) = 0$. Załóżmy, że istnieje takie $x_0 \in (0,1)$, że $f(x_0) = 1$. Pokazać, że dla pewnego $c \in (0,1)$ zachodzi $|f'(c)| > 2$.

Zadanie 3. Niech a_n będzie ciągiem takim, że szereg $\sum a_n^4$ jest zbieżny. Pokazać, że szereg $\sum \frac{a_n}{n^{4/5}}$ również jest zbieżny.

Zadanie 4. Pokazać, że jeśli $e < y < x$, to $x^y < y^x$.

Zadanie 5. Pokazać, że dla $x > 0$ zachodzi nierówność $\ln(1+x) < \frac{x}{\sqrt{1+x}}$.