1 Wykład pierwszy

1.1 Tematyka

- Sprawy organizacyjne
- Podstawowe definicje i notacje (część, bo pewnie potem będzie więcej)
- Twierdzenie Halla
- Twierdzenie Koniga
- Wzór defektowy Ore
- Twierdzenie Tutte
- Wzór Tutte–Berge
- Rozkład Gallai–Edmondsa

1.2 Szkic wykładu

1.2.1 Organizacyjne

Witam wszystkich. Mówię o wymienności wykładowcy i ćwiczeniowca, o zasadach zaliczania:

- Zadania domowe — terminy serii na stronie przedmiotu, same serie tamże, termin oddawania — 16:00 danego dnia lub pierwsza rzecz po wejściu na ćwiczenia, preferujemy maila. Potem **nie przyjmujemy**. Oceniane jak na OM
- Obecności — standardowe zasady na UW, można mieć dwie nieobecności. Nieobecność definiujemy jako fizyczny brak bytności połączony z zerem za serię związaną z odpowiednimi ćwiczeniami (funkcja ćwiczenia $\mapsto$ seria na stronie)
- Egzamin wyłącznie ustny, modyfikuje ocenę z ćwiczeń o liczbę z przedziału $[-1, 1.5]$, liczba 2.5 zaokrągla się do 2. Na egzaminie losuje się cztery pytania ze znanej z góry puli, po jednym z każdego działu (pula tematów pojawi się najpóźniej tydzień po zakończeniu działu), w tym na pytanie z wybranego działu oczekujemy bardzo wyczerpującej odpowiedzi.
- Wątpliwości wyjaśniamy obydwaj (generalnie w sprawach związanych z tym przedmiotem najlepiej kontaktować się z nami oboma jednocześnie)

Podaję maile do nas obydwu, adres strony, terminy konsultacji, numery pokojów. Literatura jest na stronie. Jakieś notatki może czasem się pojawią, a może nie.

1.2.2 Definicje

Definicja 1.1. *Graf $G = (V, E)$ to zbiór wierzchołków V i krawędzi E, gdzie elementami E są pary elementów z V. Jeśli $e = \{u, v\} \in E$, to powiemy, że e jest* krawędzią łączącą *u i v. Krawędź $e = \{u, v\}$ będziemy często skrótowo oznaczać uv.*

Graf zwykle reprezentujemy graficznie jako zbiór punktów (wierzchołki) i łączących je kresek (krawędzi). Dla grafu G zbiór jego wierzchołków oznaczamy $V(G)$. Przez *moc grafu* G rozumiemy $|V(G)|$.

Tu rysuję rysunek grafu $(\{1,2,3,4,5,6\},\{12,23,34,45,56,61,14,25\})$, na którym będę ilustrował dalsze pojęcia.

Dopełnienie zbioru S (zazwyczaj w zbiorze wierzchołków) oznaczamy $\bar{S}$. Zero jest liczbą naturalną, chyba, że jest powiedziane inaczej.

Definicja 1.2. *Niech $G = (V, E)$ będzie grafem. Wprowadzimy następujące oznaczenia:*

- *Jeśli $S, T \subset V$, to* zbiór krawędzi łączących S i T, *ozn. $E(S,T)$, to $\{st \in E : s \in S, t \in T\}$ (exemplo $E(135,123) = \{12,23,25\}$);* cięciem *nazywamy dowolny zbiór krawędzi postaci $E(S,\bar{S})$;*
- *Jeśli $S \subset V$, to* grafem indukowanym przez S, *ozn. $G[S]$, nazwiemy graf $(S, E(S,S))$ (exemplo $G[2,3,4,6]$ zawiera krawędzie 12 i 23);*
- Stopniem *wierzchołka $v \in V$, ozn.* $\deg v$, *nazywamy liczbę $|E(\{v\},V)|$, czyli liczbę krawędzi wychodzącą z v (exemplo $\deg 1 = 3$);*
- *Graf G nazwiemy* dwudzielnym, *jeśli istnieje taki rozkład $V = V_1 \cap V_2$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, że $E = E(V_1, V_2)$ (exemplo graf po prawej jest dwudzielny, rozkład to $135, 246$);*
- *Graf G nazwiemy* niespójnym, *jeśli istnieje zbiór $S \subset V$, $S \neq \emptyset$, $S \neq V$, dla którego $E(S,\bar{S}) = \emptyset$. Graf, który nie jest niespójny, nazywamy spójnym (graf po prawej jest spójny, ale np. $G[1236]$ nie jest, bo $E(123,6) = \emptyset$);*
- Składową spójności *grafu G nazwiemy dowolny maksymalny ze względu na zawieranie spójny podgraf tego grafu. Składowe spójności są rozłączne i pokrywają graf, graf spójny sam jest swoją jedyną składową spójności. Przykładowo składowe spójności $G[1236]$ to $G[123]$ i $G[6]$.*
- *Dla danego wierzchołka $v \in V$ przez $N(v)$ oznaczamy* sąsiedztwo otwarte v, *czyli $\{u \in V : uv \in E\}$. Przez $N[v]$ oznaczamy* sąsiedztwo domknięte, *czyli $N(v) \cup \{v\}$ (czyli $N(1) = 2,4,6$, $N[1] = 1,2,4,6$);*
- *Dla $S \subset V$ przez jego domknięte sąsiedztwo $N[S]$ rozumiemy $\bigcup_{v \in S} N[v]$. Przez jego otwarte sąsiedztwo $N(S)$ rozumiemy $N[S] \setminus S$. Przez jego właściwe sąsiedztwo rozumiemy $N\{S\} = \bigcup_{v \in V} N(v)$. Przykładowo $N(236) = 145, N[236] = 123456, N\{236\} = 12456$).*
- *Ciąg wierzchołków $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ nazywamy* ścieżką prostą *(lub po prostu* ścieżką*), jeśli v_i są parami różne i $v_i v_{i+1} \in E$ dla każdego $i = 1, 2, \ldots, n-1$;*
- *Ścieżkę prostą nazywamy cyklem prostym (lub po prostu cyklem), jeśli $v_1 v_n \in E$; przykładowo 12543 i 1254 są ścieżkami, ale tylko to drugie jest cyklem.*

Tematem najbliższych trzech wykładów będą skojarzenia.

Definicja 1.3. *Zbiór krawędzi $M \subset E$ nazywamy* skojarzeniem *w grafie $G = (V,E)$, jeśli żaden wierzchołek $v \in V$ nie jest końcem dwóch różnych krawędzi z M. Mówimy, że skojarzenie jest maksymalne, jeśli ma największą liczność spośród wszystkich skojarzeń w danym grafie.*

(przykładowym skojarzeniem jest $12, 45$)

Wierzchołek $v \in V$ nazywamy *skojarzonym*, jeśli jest końcem pewnej krawędzi z M.

Definicja 1.4. *Jeśli G jest grafem, zaś M — skojarzeniem w G, to ścieżkę $v_1 v_2 \dots v_n$ nazywamy ścieżką alternującą, jeśli co druga krawędź ze ścieżki należy do skojarzenia. Ścieżkę alternującą nazywamy ścieżką powiększającą, jeśli pierwszy i ostatni wierzchołek ścieżki są nieskojarzone (w szczególności ścieżka powiększająca zawiera nieparzystą liczbę krawędzi).*

Przykładową ścieżką powiększającą dla grafu G jest 3456 lub 612543.

Fakt 1.5. *Jeśli w grafie dla danego skojarzenia istnieje ścieżka powiększająca, to nie jest to skojarzenie maksymalne.*

Dowód. Jeśli F to zbiór krawędzi ścieżki powiększającej, to $(M \setminus F) \cup (F \setminus M)$ jest skojarzeniem. □

Dla pierwszej ze ścieżek otrzymujemy skojarzenie $12, 34, 56$, a dla drugiej $16, 25, 34$.

1.2.3 Twierdzenie Halla

Definicja 1.6. *Niech $G = (V_1 \cup V_2, E)$ będzie grafem dwudzielnym.* Defektem *zbioru $S \subset V_1$ (ozn. $\mathrm{def}(S)$) nazwiemy wielkość $|S| - |N(S)|$. Defektem grafu nazywamy największy defekt podzbioru V_1.*

Uwaga — defekt grafu zależy od tego, którą stronę nazwiemy V_1, a którą V_2, oraz jak zdefiniujemy podział.

Twierdzenie 1.7 (Hall)**.** *Niech $G = (V_1 \cup V_2, E)$ będzie grafem dwudzielnym. W G istnieje skojarzenie o mocy $|V_1|$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{def} G = 0$.*

Dowód. Defekt nie jest ujemny. Jeśli defekt jest za duży, to oczywiście nie wyrobi się skojarzenia. Jeśli defekty są małe, to rozważmy dowolne maksymalne skojarzenie, załóżmy, że jest mocy mniejszej niż V_1. Niech S — nieskojarzone wierzchołki z V_1, niech T — zbiór wszystkich wierzchołków na ścieżkach alternujących o początkach w S. Zbiór $T \setminus S$ nie zawiera żadnego wierzchołka nieskojarzonego (bo inaczej ścieżka alternująca byłaby powiększająca). Teraz $\mathrm{def}(T \cap V_1) > 0$, sprzeczność. □

Warunek $\mathrm{def} G = 0$ nazywamy *warunkiem Halla.* Definiuję pokrycie wierzchołkowe.

Zbiorem niezależnym nazywamy zbiór $A \subset V(G)$ taki, że nie ma krawędzi o obu końcach w A (czyli $G[A]$ nie zawiera krawędzi). B jest pokryciem wierzchołkowym w G wtedy i tylko wtedy gdy $V(G) \setminus B$ jest zbiorem niezależnym (czyli każda krawędź ma jakiś koniec w B).

Twierdzenie 1.8 (Konig)**.** *W grafie dwudzielnym liczność najmniejszego pokrycia wierzchołkowego jest równa liczności największego skojarzenia.*

Dowód. Oczywiście pokrycie wierzchołkowe musi kryć skojarzenie, więc nie może być mniejsze. Definiuję zbiór S i T jak wyżej. Analogicznie definiuję S' jako nieskojarzone w V_2 i T' jako to, gdzie dochodzą ścieżki alternujące z S'. Niech U będzie resztą. Przez dolny indeks oznaczam przecięcie z V_1 lub V_2 odpowiednio. Zauważmy, że wszystkie krawędzie z T_1 wchodzą do T_2, wszystkie zaś krawędzie z T'_2 wchodzą do T'_1 (bo inaczej moglibyśmy powiększyć odpowiedni zbiór). Wszystkie wierzchołki w T_2, T'_1 oraz U są skojarzone, zatem $|T_2| + |T'_1| + |U_1|$ to moc skojarzenia — a z drugiej strony ten zbiór stanowi pokrycie wierzchołkowe. □

Twierdzenie 1.9 (Wzór Ore)**.** *Moc największego skojarzenia w grafie dwudzielnym to $|V_1| - \mathrm{def}(G)$.*

Dowód. Że nie da się więcej, to trywialne, a że tyle się da, to dodaję wierzchołki uniwersalne w V_2. □

1.2.4 Twierdzenie Tutte

W grafach niedwudzielnych pojęcie defektu nie ma sensu. Więc je redefiniujemy. Niech $o(S)$ oznacza liczbę nieparzystej mocy składowych grafu $G[S]$.

Definicja 1.10. *Deficytem zbioru S w grafie G nazywamy $o(V \setminus S) - |S|$. Deficyt grafu G to maksimum deficytów po podzbiorach.*

Twierdzenie 1.11 (Tutte–Berge)**.** *Niech G będzie grafem, zaś M — maksymalnym skojarzeniem w nim. Wtedy $|V| - 2|M| = \mathrm{df}G$.*

Analogiczność z tw. Halla. Ta liczba po lewej to liczba nieskojarzonych wierzchołków.

Mówimy, że graf spełnia *warunek Tutte*, jeśli jego deficyt jest równy zero (deficyt zbioru pustego jest nieujemny).

Fakt 1.12. $|V| - 2|M| \geqslant \mathrm{df}G$.

Dowód. Weźmy zbiór S wybijający deficyt. Wtedy we wnętrzu każdej nieparzystej składowej znajduje się wierzchołek, który albo jest nieskojarzony, albo skojarzony z czymś z S. Ale z S jest skojarzonych co najwyżej $|S|$ wierzchołków, czyli pozostaje $\mathrm{df}G$ wierzchołków nieskojarzonych. □

Fakt 1.13. *Z grafu spójnego można usunąć wierzchołek tak, by pozostał spójny (przez drzewo rozpinające, ale może lepiej na ćwiczeniach?).*

Lemat 1.14. *Niech $S, T \subset V$. Wtedy $\mathrm{df}S \equiv_2 \mathrm{df}T$.*

Dowód. Oba przystają do $|n|$, liczę wierzchołki. □

Lemat 1.15. *Niech $S \subset V$ będzie najliczniejszym zbiorem spośród tych o maksymalnym deficycie. Wtedy $G[V \setminus S]$ zawiera wyłącznie nieparzyste składowe, a każda z nich po usunięciu dowolnego wierzchołka spełnia warunek Tutte.*

Dowód. Weźmy parzystą składową, przerzucenie wierzchołka z niej do S nie zmniejsza deficytu (bo dodaję jeden wierzchołek, a przynajmniej jedną nieparzystą składową, co przeczy maksymalności S).

Teraz weźmy nieparzystą składową C i usuńmy z niej wierzchołek v. Załóżmy, że jakiś zbiór $T \subset V(C) \setminus \{v\}$ nie spełnia warunku Tutte. To znaczy, że $G[V(C) \setminus (T \cup \{v\})]$ zawiera przynajmniej $|T|+1$ nieparzystych składowych spójności. Zatem $G[V \setminus (T \cup S \cup \{v\})]$ zawiera przynajmniej $o(V \setminus S) - 1 + |T| + 1 = o(V \setminus S) + |T|$ składowych spójności, czyli $\mathrm{df}(S \cup T \cup \{v\}) \geqslant \mathrm{df}S - 1$, a to z parzystości oznacza, że $\mathrm{df}(S \cup T \cup \{v\}) \geqslant \mathrm{df}S$, co przeczy maksymalności S. □

Jesteśmy już gotowi na dowód wzoru Tutte–Berge

(ilustrować na grafie $4-4$, krawędzie $00, 01, 12, 13, 22, 23, 33$, to nie spełnia Halla dla 123, dorysować 11)

Dowód. Jak deficyt duży, to skojarzenia oczywiście nie będzie. W drugą stronę dowodzimy przez indukcję po $|V(G)|$. Dla $|V(G)| = 0$ teza oczywista. Rozważmy największy zbiór o największym deficycie S. Jego dopełnienie rozpada się na nieparzyste składowe. Robię graf dwudzielny, ściągając te składowe do pojedynczych wierzchołków i kasując krawędzie wewnątrz S. Weźmy $T \subset S$. Zauważmy, że $|N_H(T)| \geqslant |T|$, bo inaczej wywalając T z S w najgorszym razie skasujemy te wszystkie składowe (tj. połączymy w jedną lub więcej parzystych), pozostałe pozostaną składowymi nieparzystymi, czyli deficyt wzrośnie, wbrew definicji S. To znaczy, że H spełnia warunek Halla, czyli mogę skojarzyć S ze składowymi nieparzystymi.

Kojarzę zatem S ze składowymi. Z każdej składowej usuwam wierzchołek skojarzony z czymś w S, resztę (na mocy założenia indukcyjnego i lematu) mogę skojarzyć. Z pozostałych (nieskojarzonych) składowych (których liczba jest równa deficytowi grafu) usuwam dowolny wierzchołek i (na mocy założenia i lematu) kojarzę resztę. □

Definiuję skojarzenie doskonałe.

Twierdzenie 1.16 (Tutte)**.** *Wnioskiem jest tw. Tutte, że skojarzenie doskonałe istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy deficyt jest zerowy.*

Definicja 1.17. *Graf G nazwiemy* krytycznym *(ang.* factor–critical*), jeśli dla każdego $v \in V(G)$ graf $G \setminus v$ ma doskonałe skojarzenie.*

Twierdzenie 1.18 (Rozkład Gallai–Edmonds)**.** *W grafie G niech D będzie zbiorem tych wierzchołków v, dla których istnieje najliczniejsze skojarzenie nie kojarzące v. Niech $A = N(D)$, $C = V(G) \setminus A \setminus D$. Oznaczmy przez $G_1, G_2, \ldots, G_k$ spójne składowe $G[D]$. Wówczas dla dowolnego najliczniejszego skojarzenia M:*

1. *M zawiera doskonałe skojarzenie w $G[C]$.*
2. *Każdy G_i jest krytyczny, i M zawiera skojarzenie rozmiaru $\frac{1}{2}(|V(G_i)| - 1)$ w G_i.*
3. *$\emptyset \neq S \subset A$, to $N(S)$ dotyka co najmniej $|S| + 1$ spójnych składowych D.*
4. *$\mathrm{df}(A) = \mathrm{df}(G) = k - |A|$.*

Dowód. Bierzemy w grafie zbiór S: największy możliwy zbiór o największym możliwym deficycie. Pokażemy, jak w nim leżą A, D i C.

Spójrzmy na M. Skojarzenie M nie kojarzy $d = \mathrm{df}(G) = \mathrm{df}(S)$ wierzchołków. Czyli musi kojarzyć wszystkie elementy z S z czymś spoza S, i w d spójnych składowych $G \setminus S$ nie ma czegoś skojarzonego z S. Zgodnie z lematem, wszystkie spójne składowe $G[V \setminus S]$ są nieparzyste i krytyczne. Co więcej, po ściągnięciu składowych $G[V \setminus S]$ do punktów (graf $H(S)$), graf ten spełnia warunek Halla (czyli defekt strony S jest zero).

Weźmy taki $R \subset S$, który jest maksymalny w sensie zawierania w $H(S)$ taki, że jego defekt jest zerowy. Fakcik: jeśli $\mathrm{def}(G) = 0$ i $S, T \subset V(G)$, $\mathrm{def}(S) = \mathrm{def}(T) = 0$, to $\mathrm{def}(S \cup T) = 0$. Dowód:

$$|S \cup T| \leqslant |N(S \cup T)| = |N(S)| + |N(T)| - |N(S \cap T)| = |S| + |T| - |N(S \cap T)| \leqslant |S| + |T| - |S \cap T| = |S \cup T|.$$

Zauważamy, że w każdym najliczniejszym skojarzeniu wszyscy sąsiedzi R w $H(S)$ są skojarzeni, czyli R siedzi w C oraz całe składowe będące jego sąsiadami siedzą w C.

Teraz chcemy pokazać, że $S \setminus R = A$, a reszta to D. Ale to proste: w reszcie, warunek Halla ma luz (tj. z fakciku powyżej i maksymalności R, dla każdy niepusty zbiór w $S \setminus R$ ma ujemny defekt w grafie $H(S) \setminus (N[R])$, czyli po wywaleniu R i jego sąsiadów), więc mogę kazać jakiejś spójnej składowej $G[V \setminus S]$ nie sąsiadującą z R nie być skojarzoną z S, i wciąż będzie $H(S)$ spełniał warunek Halla. Taka spójna składowa jest krytyczna, więc mogę dowolnemu jej wierzchołkowi zabronić być w skojarzeniu. Stąd pozostałe spójne składowe siedzą w D. Elementy T nie mogą być w D, a $T \setminus R$ sąsiaduje z czymś co właśnie zaliczyliśmy do D, koniec. □

1.3 Wprowadzone pojęcia i ustalenia notacyjne i nazewnicze

- Graf (oznacza nieskierowany, bez pętli i multikrawędzi), $V(G)$, $G[S]$, stopień, końce krawędzi, graf dwudzielny
- Zbiór $N(S)$ nazywam *sąsiedztwem* S i jest on rozłączny z S
- Sąsiedztwo domknięte $\bar{N}(S)$
- Skojarzenie, skojarzenie doskonałe, ścieżka prosta (czyli bez powtórzeń wierzchołków), ścieżka alternująca, powiększająca
- Mam problem z angielskimi *defect* i *deficiency*, tłumaczyłbym najchętniej oba na defekt, ale to chyba złe... Obecnie tłumaczę (nieco na pałę) na defekt i deficyt (grafu i zbioru wierzchołków).
- Graf spójny, składowa spójności
- Moc grafu (ozn. $|G|$) to liczba wierzchołków.
- Warunek Halla, warunek Tutte, tw. Halla, wzór Ore, tw. Tutte, wzór Tutte–Berge, tw. Koniga.

2 Wykład drugi — Perfect Matching Polytope

2.1 Tematyka

Definicja wielościanu doskonałych skojarzeń, dowód tego, jak jest zadany.

2.2 Szkic wykładu

2.2.1 Wstęp

Wstęp — dla grafu (V, E) spójrzmy na przestrzeń liniową $\mathbb{R}^{|E|}$. Będziemy współrzędną wektora x w tej przestrzeni odpowiadającą krawędzi e oznaczać przez x_e. Podzbiór F zbioru krawędzi będziemy utożsamiać z wektorem, w którym $x_e = 1$ jeśli $e \in F$, a $x_e = 0$ jeśli $e \notin F$. Skojarzenia utożsamiają się z wektorami spełniającymi dwa warunki:

- $\forall_{e \in E} x_e \in \{0, 1\}$,
- $\forall_{v \in V} \sum_{e \in \delta(v)} x_e \leqslant 1$,

gdzie przez $\delta(v)$ rozumiem zbiór krawędzi, których końcem jest v.

Będziemy rozważać uwypuklenie takiego zbioru. Jeżeli dobrze uda nam się taki opisać i zrozumieć to uwypuklenie, to uzyskamy pewną metodę analizy skojarzeń — przykładowo będziemy mogli dowodzić, że to, co wyszło, musi mieć duży wymiar, a zatem w grafie jest dużo różnych skojarzeń (albo choćby, że jest niepuste, skąd w grafie jest jakieś doskonałe skojarzenie). Wpierw jednak jest nam potrzebne przypomnienie lub wprowadzenie pewnej liczby definicji i faktów.

2.2.2 Wielokomórki

Definicja 2.1. *Wielokomórka wypukła (nie będę rozważał innych, więc od teraz po prostu nazywam ją wielokomórką) to zbiór ograniczony skończoną liczbą nierówności (nieostrych) i równań liniowych w $\mathbb{R}^n$. Chodzi o uogólnienie wielokąta i wielościanu (domkniętych) na wyższe wymiary.*

Istnieje jakaś spora liczba faktów o wielokomórkach, w które bardzo łatwo uwierzyć, zapewne część z nich wynieśliśmy z GALu, Algebry dla informatyków lub sami kiedyś wymyśliliśmy. Wobec tego sformułuję je jako fakt prawdziwy, i zaniedbam dowodzenie, jeśli miałoby mnie to spowolnić. Będzie mi też potrzebna pewna liczba definicji.

Definicja 2.2. *Kombinacją wypukłą zbioru punktów $x_1, x_2, \dots, x_n$ nazywam punkt $\sum_{i=1}^{n} t_i x_i$, gdzie t_i są liczbami rzeczywistymi, nieujemnymi i sumują się do jedynki. Uwypukleniem zbioru punktów nazywam zbiór wszystkich kombinacji wypukłych tego zbioru punktów.*

Stwierdzenie 2.3. *Zachodzą następujące fakty (ich nie trzeba umieć dowodzić, postaram się znaleźć jakiś odnośnik na dowody, gdyby ktoś był zainteresowany):*

- *Wielokomórka jest zbiorem wypukłym (bo jest przecięciem zbiorów wypukłych — hiperpłaszczyzn i półprzestrzeni).*
- *(twierdzenie Minkowskiego—Weyla) uwypuklenie skończonej liczby punktów zadaje się skończoną liczbą równań i nierówności liniowych (czyli jest wielokomórką). To nie jest banalne (konkretnie — niebanalny jest dowód, że naturalny zbiór nierówności zadaje zbiór ograniczony), ale nie jest trudne do uwierzenia, a dowód wydaje mi się być bardziej techniczny, niż ciekawy.*
- *Wierzchołkiem wielokomórki w $\mathbb{R}^n$ nazwę taki punkt, że dla każdego zbioru nierówności oraz równości zadających tę wielokomórkę, przynajmniej n z nich jest równościami w tym punkcie.*
- *Kolejnym faktem (też nietrudnym do uwierzenia) jest to, że wielokomórka jest uwypukleniem swoich wierzchołków.*
- *A trzecim faktem z tej kategorii jest to, że wierzchołki to to samo, co punkty ekstremalne (czyli takie punkty, które nie są kombinacją wypukłą o niezerowych współczynnikach innych punktów wielokomórki).*

2.2.3 Pełne skojarzenia w grafie dwudzielnym

Definicja 2.4. *Mamy graf dwudzielny $G = (V_1 \cup V_2, E)$. Pełnym skojarzeniem na tym grafie nazywamy skojarzenie mocy $|V_1|$.*

Fakt 2.5. *W każdym grafie zawierającym choć jedną krawędź istnieje albo cykl, albo ścieżka o początku i końcu w liściach.*

Dowód był na pierwszych ćwiczeniach. Najprościej chyba tak, że biorę najdłuższą ścieżkę w grafie, i albo oba końce są liśćmi, albo któryś z nich widzi jakiś wierzchołek poza swoim poprzednikiem na ścieżce, i wtedy dostaję cykl.

Stwierdzenie 2.6. *Uwypuklenie pełnych skojarzeń na grafie dwudzielnych (oznaczę to uwypuklenie przez $FMP(G)$) jest równe zbiorowi P tych $x \in \mathbb{R}^{|E|}$, które spełniają:*

- $\forall_{e \in E} x_e \geqslant 0$

- $\forall_{v \in V_1} \sum_{u: uv \in E} x_{uv} = 1$
- $\forall_{v \in V_2} \sum_{u: uv \in E} x_{uv} \leqslant 1$

Dowód. P jest wielokomórką, jest zatem wypukły. Każde pełne skojarzenie spełnia równania powyżej (pierwsze — bo $x_e \in \{0, 1\}$, drugie, bo dokładnie jedna krawędź wychodząca z danego wierzchołka z V_1 jest w skojarzeniu (czyli jej współczynnik jest jedynką), trzecie — bo co najwyżej jedna krawędź skojarzenia wychodzi z każdego wierzchołka z V_2), zatem uwypuklenie pełnych skojarzeń jest zawarte w P.

Teraz chcemy dowieść, że P jest zawarte w $FMP(G)$. Rozważmy wierzchołki P. Jeśli wszystkie są skojarzeniami doskonałymi, to P (jako uwypuklenie swoich wierzchołków) jest zawarte w $FMP(G)$. Zauważmy, ze z warunków wynika $0 \leqslant x_e \leqslant 1$ dla każdego $e \in E$, zatem jeśli wierzchołek nie jest skojarzeniem, to ma jakieś niecałkowite współrzędne. Jeżeli jest skojarzeniem, to musi być mocy V_1 z warunku drugiego. Rozważmy graf $G' = (V, E')$, gdzie do E' bierzemy tylko te krawędzie, które odpowiadają niecałkowitym współrzędnym naszego wierzchołka x. Jeżeli w G' istnieje cykl, to jest on parzysty (bo graf dwudzielny). Niech $y_e = \pm 1$ naprzemiennie dla kolejnych elementów tego cyklu, i $y_e = 0$ jeśli e nie należy do cyklu. Wtedy $x = (x + \varepsilon y + x - \varepsilon y)/2$, więc jeśli $x + \varepsilon y, x - \varepsilon y \in P$, to x nie jest punktem ekstremalnym, czyli nie jest wierzchołkiem, sprzeczność. Ale współrzędne x zmieniły się o ε w każdej krawędzi, czyli dla dostatecznie małego ε nie przekroczyły zera (zatem pierwszy warunek spełniony), zaś sumy w wierzchołkach się nie zmieniły (czyli drugi i trzeci też). Jako ε możemy tu wziąć np. minimalną wartość x_e po krawędziach e z naszego cyklu.

Teraz rozważmy przypadek, w którym mamy scieżkę o końcach w liściach. Liście muszą być w V_2 (bo dla $v \in V_1$ skoro suma współrzędnych krawędzi jest całkowita, to nie może wchodzić tylko jedna krawędź niecałkowita), i suma wag w liściach musi być ostro mniejsza od jedności (bo wchodzi tylko jedna krawędź niecałkowita). Robimy zatem tę samą operację, tylko jeszcze zmniejszamy ε tak, żeby nie przekroczyć jedynki przy zwiększaniu krawędzi wchodzących do liści. □

Analogiczny fakt jest prawdziwy, jeśli rozważmy wielokomórkę wszystkich skojarzeń (wtedy warunek drugi zmienia się z równości w nierówność).

2.2.4 Wielokomórka doskonałych skojarzeń

Dla grafów niedwudzielnych nie ma tak dobrze, istnieją punkty, które z naszego obecnego punktu widzenia wyglądają jak skojarzenia, ale nie są kombinacją wypukłą skojarzeń. Przykładowo jeśli weźmiemy trójkąt i położymy na każdej krawędzi współczynnik $1/2$, to otrzymaliśmy coś, co spełnia warunki stwierdzenia powyżej, a nie jest kombinacją wypukłą skojarzeń.

Powodem oczywiscie jest parzystość — po prostu suma wszystkich krawędzi w naszym przykładzie to $3/2$, podczas gdy suma krawędzi dowolnego skojarzenia to 1. Podobne przykłady można jednak podać w grafach parzystej mocy (np. dwa trójkąty połączone krawędzią). Racjonalnym warunkiem zatem wydaje się to, żeby suma krawędzi wewnętrznych dowolnego nieparzystego podgrafu S była nie większa niż $(|S| - 1)/2$.

W wypadku skojarzeń doskonałych (a takimi będziemy się teraz zajmować) warunek powyżej jest równoważny stwierdzeniu, że jeśli rozbijemy V na dwa zbiory nieparzyste (V musi być parzyste, jeśli ma istnieć jakiekolwiek doskonałe skojarzenie), to między nimi przebiega przynajmniej jedna krawędź, czyli algebraicznie

$$\sum_{e \in E(S, \bar{S})} x_e \geqslant 1,$$

gdzie $E(S, T)$ oznacza zbiór krawędzi łączących zbiory S i T.

Twierdzenie 2.7 (Edmonds)**.** *Uwypuklenie skojarzeń doskonałych w grafie G, jest równe zbiorowi P tych wszystkich x, które spełniają:*

- $\forall_{e\in E} x_e \geqslant 0$
- $\forall_{v\in V} \sum_{e\in\delta(v)} x_e = 1$
- $\forall_{S\subset V, |S|\equiv_2 1} \sum_{e\in E(S,\bar{S})} x_e \geqslant 1.$

Uwaga do twierdzenia — jeśli graf ma nieparzystą liczbę wierzchołków, to biorąc $S = V$ dostajemy sprzeczność z warunkiem trzecim — zatem zarówno zbiór doskonałych skojarzeń, jak i zbiór P są puste, a zatem teza twierdzenia zachodzi.

Dowód. Jak poprzednio, każde doskonałe skojarzenie należy do P, P jest wielokomórką, a zatem wypukły, czyli uwypuklenie doskonałych skojarzeń jest zawarte w P. Uwypuklenie zbioru doskonałych skojarzeń będziemy oznaczać przez $PMP(G)$.

Dowodzimy przez indukcję po łącznej liczbie wierzchołków i krawędzi G. Dla grafu bez wierzchołków i krawędzi teza jest trywialna. Ustalmy jakiś graf G, załóżmy, że dla mniejszych teza zachodzi. Niech x będzie wierzchołkiem P, który nie jest skojarzeniem.

Część pierwsza Udowdnimy, że dla pewnego nieparzystego podgrafu $S \subset G$, $|S| \geqslant 3$, $|V \setminus S| \geqslant 3$, zachodzi równość w trzecim warunku.

Zauważmy, że jeśli $x_e = 0$ dla pewnego $e \in E$, to dla grafu $G' = (V, E \setminus \{e\})$ zachodzi teza, stąd odpowiedni wektor x' w $\mathbb{R}^{|E\setminus\{e\}|}$ jest kombinacją wypukłą pewnych doskonałych skojarzeń w G'. Ale każde doskonałe skojarzenie w G' odpowiada pewnemu doskonałemu skojarzeniu w G, które nie zawiera krawędzi e, i x jest kombinacją wypukłą odpowiadających skojarzeń (z tymi samymi współczynnikami), co przeczy założeniu o x. Stąd $x_e > 0$ dla każdego e. Podobnie, jeśli $x_e = 1$, gdzie $e = uv$, to wszystkie pozostałe krawędzie wychodzące z u lub v muszą mieć przypisaną wagę zero, skąd możemy analogicznie usunąć u, v i wszystkie krawędzie z nich wychodzące, rozłożyć to, co zostało z x w powstałym grafie i przenieść ten rozkład na cały graf. Wobec tego zakładamy, że wszystkie wagi na krawędziach są niecałkowite.

Wiemy, że mamy przynajmniej $|E|$ równości, bo x jest wierzchołkiem. Drugi warunek daje nam $|V|$ równości. Warunek pierwszy nie może dać nam równości, bo powyżej udowodniliśmy, że $x_e > 0$. Zatem wystarczy udowodnić $|V| < |E|$. W grafie nie może być wierzchołków izolowanych (warunek drugi dla nich nie mógłby być spełniony) oraz stopnia 1 (bo wtedy wychodząca z niego krawędź musiałaby mieć współczynnik 1). Zatem $|V| \geqslant |E|$ i aby zachodziła równość, to G musi być sumą rozłącznych cykli. Ten przypadek jest prosty i zrobimy go na ćwiczeniach.

Część druga Mamy zbiór S taki, że między S i $\bar{S}$ krawędzie mają łączny współczynnik dokładnie 1. $|S| \geqslant 3$ i $|\bar{S}| \geqslant 3$ (bo zbiory mocy 1 są objęte drugim warunkiem). Rozważmy teraz grafy G' i G''. W pierwszym ściągamy S do jednego wierzchołka, w drugim $\bar{S}$ (czyli formalnie: $G' = (S \cup \{v'\}, E')$, gdzie $uv \in E'$ jeśli $uv \in E(S, S)$ lub $v = v'$ i istnieje krawędź łącząca u z jakimś wierzchołkiem $w \in \bar{S}$, analogicznie dla G''). Rozważamy w G' i G'' odpowiednio wektory x' i x''. Dla $u, v \in S$ kładę $x'_{uv} = x_{uv}$, a $x'_{uv'} = \sum_{w\in\bar{S}} x_{uw}$, analogicznie dla x''.

Chcemy udowodnić, że $x' \in PMP(G')$ (i analogicznie dla G''). Na mocy założenia indukcyjnego (nie dodaliśmy krawędzi, a usunęliśmy przynajmniej dwa wierzchołki) G' spełnia twierdzenie Edmondsa, skąd wystarczy sprawdzić warunki algebraiczne. Pierwszy nadal jest spełnione (bo wagi albo przenoszę z x, albo sumuję dodatnie wagi z x), drugi jest spełniony (dla $v \in S$ trywialnie, dla v' na mocy definicji zbioru S — łączna waga wszystkich krawędzi łączących S i $\bar{S}$ to 1), a trzeci jest spełnione z trzeciego dla x. Wobec tego x' jest kombinacją wypukłą pewnych skojarzeń w G'. Analogicznie x'' jest kombinacją skojarzeń w G''. Chcemy zadać x jako kombinację wypukłą skojarzeń wykorzystując rozkłady x' i x''.

Część trzecia Zauważmy, że dla dowolnego doskonałego skojarzenia M w G zawierającego tylko jedną krawędź uw między S a $\bar{S}$ możemy zdefiniować doskonałe skojarzenia M' w G' i M'' w G'' — do M' bierzemy krawędzie wewnątrz S, a krawędź uw zastępujemy przez uv'. Analogicznie do M'' bierzemy krawędzie wewnątrz $\bar{S}$ oraz $v''w$. Ta sztuczka działa też w drugą stronę — jeśli mamy doskonałe skojarzenie M' w G' zawierające uv' i doskonałe skojarzenie M'' w G'' zawierające $v''w$, to możemy z tego zrobić doskonałe skojarzenie M w G, biorąc $(M' \setminus \{uv'\}) \cup (M'' \setminus \{v''w\}) \cup \{uw\}$. Czyli, innymi słowy, dla ustalonej krawędzi $uw \in E(S, \bar{S})$ istnieje naturalna bijekcja pomiędzy doskonałymi skojarzeniami M w G zawierającymi uw, a parami (M', M''), gdzie M' to doskonałe skojarzenie w G' zawierające uv', zaś M'' to doskonałe skojarzenie w G'' zawierające $v''w$.

Teraz definiujemy kombinację wypukłą skojarzeń, o której będziemy dowodzić, że jest równa x, co zakończy dowód (uzyskana sprzeczność z definicją x dowiedzie, że każdy wierzchołek P jest skojarzeniem). Trzeba określić, jaki współczynnik postawimy przy skojarzeniu doskonałym M w G. Jeśli M zawiera więcej niż jedną krawędź łączącą S z $\bar{S}$, to stawiamy współczynnik zero. Jeśli jest dokładnie jedna krawędź uw łącząca S z $\bar{S}$, to jako współczynnik przy M (utożsamiamy skojarzenie z wektorem z nim związanym) bierzemy $c_M = \frac{a_{M'} b_{M''} x_{uw}}{x'_{uv'} x''_{v''w}}$, gdzie $a_{M'}$ i $b_{M''}$ to współczynniki przy M' i M'' w rozkładach x' i x'' odpowiednio.

Trzeba sprawdzić trzy rzeczy — że $\sum_M c_M = 1$ (bo ewidentnie są nieujemne, więc to wystarczy, by to była faktycznie kombinacja wypukła), że $\left(\sum c_M M\right)_e = x_e$ na krawędziach e wewnątrz S (wewnątrz $\bar{S}$ będzie analogicznie), i że $\left(\sum c_M M\right)_e = x_e$ na krawędziach między S a $\bar{S}$, co da łącznie, że $\sum c_M M = x$.

Część czwarta Teraz rachunki. Wpierw zauważmy, że dla ustalonego $w \in \bar{S}$ suma $\sum_{M'' \ni v''w} \frac{b_{M''}}{x''_{v''w}}$ jest równa $\sum_{M''} M''_{v''w} \frac{b_{M''}}{x''_{v''w}} = \frac{(\sum_{M''} b_{M''} M'')_{v''w}}{x''_{v''w}} = 1$, bo $\sum_{M''} b_{M''} M'' = x''$ z definicji $b_{M''}$. Będziemy z tego korzystać.

Teraz sprawdzamy sumę na krawędzi $uw \in E(S, \bar{S})$. Mamy $(\sum_M c_M M)_{uw} = \sum_{M \ni uw} c_M$. Korzystamy z bijekcji z części trzeciej, dostajemy $\sum_{M' \ni uv'} \sum_{M'' \ni v''w} \frac{a_{M'} b_{M''} x_{uw}}{x_{uv'} x_{v''w}}$. Czynnik x_{uw} możemy wyłączyć przed sumę, reszta rozbija się na dwie sumy takie, jak w akapicie powyżej, a więc skracające się do jedynki — stąd całość równa jest x_{uw}, czyli tyle, ile powinno wyjść.

Teraz sprawdźmy sumę na krawędzi $e \in E(S, S)$. Mamy $(\sum_M c_M M)_e = \sum_M c_M M_e = \sum_{uw} \sum_{M \ni uw} c_M M_e = \sum_{M' \ni uv'} \sum_{M'' \ni v''w} c_M M_e$. Teraz zauważmy, że $M_e = M'_e$, czyli sumę z M'' możemy obliczyć, i tak, jak w poprzednim rachunku skraca się ona do jedynki. Zostaje $\sum_{uw \in E(S,\bar{S})} x_{uw} \frac{\sum_{M' \ni uv'} a_{M'} M'_e}{x'_{uv'}}$. Teraz zmieniamy kolejność sumowania: $\sum_{M'} a_{M'} M'_e \frac{\sum_{w \in \bar{S} : uw \in E(S,\bar{S})} x_{uw}}{x'_{uv'}}$, gdzie u to wierzchołek połączony z v' w M'. Ale teraz ten drugi ułamek skraca się do jedynki — $x'_{uv'}$ z definicji jest równe sumie wszystkich x_{uw} po $w : uw \in E(S, \bar{S})$, zatem zostaje $\sum_{M'} a_{M'} M'_e$, a to, z definicji, jest równe x'_e (bo $a_{M'}$ to dokładnie współczynnik przy M' w przedstawieniu x' jako kombinacji liniowej, czyli $\sum a_{M'} M' = x'$). Zaś dla $e \in E(S, S)$ mamy $x'_e = x_e$, czyli to, co chcieliśmy.

Na deser ostatni rachunek. $\sum_M c_M = \sum_{uw \in E(S,\bar{S})} \sum_{M \ni uw} c_M$. Tę wewnętrzną sumę liczyliśmy licząc sumę dla krawędzi x_{uw}, i otrzymaliśmy x_{uw}. Zatem $\sum_M c_M = \sum_{uw \in E(S,\bar{S})} x_{uw}$. Ale to jest równe jedności z definicji zbioru S. Czyli faktycznie mamy kombinację wypukłą. $\square$

3 Wykład trzeci — twierdzenie Madera o $\mathcal{S}$–ścieżkach oraz wymiar Perfect Matching Polytope.

3.1 Wymiar PMP

Tutaj pozwalamy na wielokrotne krawędzie, ale nie na pętelki.

Definicja 3.1. *Krawędź w grafie nazywamy* pokrytą, *jeśli jest krawędzią jakiegoś doskonałego skojarzenia. Graf nazwiemy* pokrytym przez skojarzenia *(ang. matching covered), jeśli każda krawędź jest pokryta.*

Definicja 3.2. *Cięcie w grafie nazwiemy ciasnym (ang. tight), jeśli każde doskonałe skojarzenie używa dokładnie jednej krawędzi z tego grafu i nie jest to cięcie oddzielające pojedynczy wierzchołek.*

Uwaga 3.3. *G — graf spójny pokryty przez skojarzenia.*

1. *G musi być dwuspójny, w szczególności G nie może mieć mostów (poza K_2).*
2. *Jeśli cięcie dzieli zbiór wierzchołków na A i B, to $G[A]$ i $G[B]$ są spójne.*
3. *Grafy G/A i G/B też mają doskonałe skojarzenia i też są pokryte przez skojarzenia.*
4. *Doskonałe skojarzenie w G to sklejenie dwóch skojarzeń z G/A i G/B takich, co się używają tej samej krawędzi na styku.*

Definicja 3.4. *Niech G będzie grafem spójnym, pokrytym przez skojarzenia. Załóżmy, że G nie ma ciasnych cięć. Wówczas, jeśli G jest dwudzielny, to nazywamy go* klamrą *(ang. brace). Jeśli G nie jest dwudzielny, to nazywamy go* cegłą *(ang. brick).*

Twierdzenie 3.5 (Edmonds, Lovász, Pulleybank, 1982)**.** *Graf G jest cegłą wtedy i tylko wtedy gdy jest* 3*-spójny i dwukrytyczny (graf jest dwukrytyczny, jeśli usuwając dowolne dwa wierzchołki, wciąż mamy doskonałe skojarzenie).*

Twierdzenie 3.6. *Graf spójny dwudzielny G jest klamrą wtedy i tylko wtedy gdy usuwając dowolne cztery wierzchołki, po dwa z każdej strony grafu dwudzielnego, wciąż mamy doskonałe skojarzenie.*

Dowód. Wpierw wykażemy, jak z ciasnego podziału otrzymać złe cztery wierzchołki. Biorąc końce dwóch rozłącznych krawędzi z podziału mamy źle: bo jeśliby się udało zrobić doskonałe skojarzenie, to możemy go powiększyć o te dwie krawędzie. A nie ma podziałów wyglądających jak gwiazdki.

W drugą stronę, weźmy złe cztery wierzchołki: u_1 i u_2 z U i w_1 i w_2 z W. Wpierw zauważmy, że w grafie pokrytym przez skojarzenia nie może być zbioru „na styk" w twierdzeniu Halla, poza całym U: jeśli byłoby takie S, to krawędzie z $N(S)$ do $U \setminus S$ nie są pokryte, a G był spójny. Czyli jedyna szansa na brak skojarzenia jest taka, że mamy S o deficycie 1, bo w oryginalnym G S znało u_1 i u_2. No dobra, ale teraz $A := S \cup N_G(S)$ i $B := V(G) \setminus A$ to jest ciasny podział: krawędzie idą tylko z $W \cap A$ do $U \cap B$, i $W \cap A$ jest o jeden większe niż $U \cap A$. □

Uwaga 3.7. *Możemy w następujący rozłożyć graf pokryty przez skojarzenia G: jeśli ma on ciasne cięcie (A, B), tniemy go na G/A i G/B: otrzymane grafy wciąż są pokryte przez skojarzenia. Taką procedurę nazywamy* rozkładem na klamry i cegły *(ang. brick and brace decomposition).*

Twierdzenie 3.8 (Lovász, 1987)**.** *Niezależnie od tego, jak zrobimy rozkład na klamry i cegły grafu, zawsze dostaniemy ten sam zbiór cegieł i klamr (z dokładnością do różnicy w krotnościach krawędzi).*

Twierdzenie 3.9 (Edmonds, Lovász, Pulleybank, 1982)**.** *Niech w rozkładzie na cegły i klamry grafu pokrytego przez skojarzenia G wystąpi $b(G)$ cegieł. Wówczas wymiar perfect matching polytope grafu G wynosi $|E(G)| - |V(G)| + 1 - b(G)$.*

Wniosek 3.10. *Cegła ma co najmniej $n/2 + 1$ doskonałych skojarzeń.*

Dowód. Cegła nie ma wierzchołków stopnia mniejszego niż 3, bo jest 3–spójna. Wobec tego $|E(G)| \geqslant \frac{3}{2}|V(G)|$. W jej rozkładzie na klamry i cegły występuje jedna cegła — ona sama. Czyli wymiar PMP wynosi co najmniej $\frac{3}{2}n - n + 1 - 1 = n/2$, więc musi być co najmniej $n/2 + 1$ doskonałych skojarzeń rozpinającym PMP. □

Lemat 3.11. *Niech G będzie pokryty przez skojarzenia.*

$$b(G) \leqslant \frac{1}{2} \left(|E(G)| - |V(G)|\right).$$

Dowód. Indukcja ze względu na wielkość G.

1. Dla klamry: $b(G) = 0$, a G nie ma mostów, bo jest pokryty przez skojarzenia, więc $|E(G)| \geqslant |V(G)|$.
2. Dla cegły: $b(G) = 1$, a $|E(G)| \geqslant \frac{3}{2}|V(G)|$ oraz $|V(G)| \geqslant 3$ — bo musi być cykl nieparzystej długości
3. Krok indukcyjny: cięcie ma co najmniej 2 krawędzie (nie ma mostów), w wyniku cięcia podwajają się krawędzie na cięciu (co najmniej dwie) oraz dochodzą dwa nowe wierzchołki w ogólnej puli wszystkich grafów po cięciu, czyli bilans jest na plus.

□

Wniosek 3.12. *W grafie kubicznym bez mostów jest co najmniej $n/4 + 2$ doskonałe skojarzeń.*

Dowód. Mamy n wierzchołków, $\frac{3}{2}n$ krawędzi, i, zgodnie z lematem 3.11, co najwyżej $\frac{1}{4}n$ cegieł. Korzystając z twierdzenia 3.9, mamy więc wymiar PMP co najmniej $n/4 + 1$, czyli co najmniej $n/4 + 2$ doskonałych skojarzeń. □

Liczba skojarzeń w różnych klasach grafów — w tym, w kubicznych bez mostów — była przedmiotem badań.

Hipoteza 3.13 (Lovász–Plummer, lata 70.)**.** *Istnieje stała $c > 1$, że jeśli G jest grafem kubicznym bez mostów, to ma co najmniej $c^{|V(G)|}$ doskonałych skojarzeń.*

Oto trochę dotychczasowych wyników w tej dziedzinie:

1. (pokazaliśmy wcześniej) $n/4 + 2$ (Edmonds, Lovász, Pulleybank, 1982),
2. $n/2$ (Kráľ, Sereni, Stiebitz, 2008),
3. $3n/4 - 10$ (Esperet, Kráľ, Škoda, Škrekovski, 2009),
4. dla każdego α istnieje β, że jest ich co najmniej $\alpha n - \beta$ (Esperet, Kardoš, Kráľ, 2009),

5. c^n jeśli G jest dwudzielny (Voorhoeve, 1979),

6. $2^{n/655978752}$ jeśli G jest planarny (Chudnovsky, Seymour, 2008),

7. $c\,2^{n/61}$ jeśli G jest fullerenem, tj. planarny, 3–spójny ze ścianami będącymi tylko sześciokątami i pięciokątami (Kardoš, Kr'al', Miškuf, Sereni, 2008).

Zacytujmy jeszcze jedną, pokrewną hipotezę:

Hipoteza 3.14 (Berge–Fulkerson, 1979)**.** *Jeśli G jest grafem kubicznym bez mostów, to istnieje 6 doskonałych skojarzeń takich, że każda krawędź zawiera się w dokładnie dwóch.*

Jeszcze jedno twierdzenie jako ciekawostka na koniec:

Twierdzenie 3.15 (Kotzig)**.** *Jeśli graf ma dokładnie jedno doskonałe skojarzenie, to ma most.*

3.2 Twierdzenie Madera o $\mathcal{S}$–ścieżkach

Definicja 3.16. *Niech $\mathcal{S}$ będzie rodziną parami rozłącznych podzbiorów $V(G)$. $\mathcal{S}$–ścieżka to ścieżka łącząca dwa różne zbiory z $\mathcal{S}$.*

Definicja 3.17. Podziałem Madera *nazywamy taki podział $V(G)$ na zbiory $U_0, U_1, \ldots, U_k$, że każda $\mathcal{S}$–ścieżka przecina U_0 lub zawiera krawędź $G[U_i]$ dla pewnego $1 \leqslant i \leqslant k$. Oznaczamy*

$$\mu(\{U_i\}) = |U_0| + \sum_{i=1}^{k} \lfloor \frac{1}{2}|B_i| \rfloor,$$

gdzie $B_i = U_i \cap (\bigcup \mathcal{S} \cup N(V \setminus U_0 \setminus U_i))$. Ponadto $\mu(G)$ to najmniejsze możliwe $\mu(\{U_i\})$ po wszystkich podziałach Madera.

Uwaga 3.18. *Dodanie do jakiegoś zbioru w $\mathcal{S}$ nowego wierzchołka, lub podzielenie zbioru z $\mathcal{S}$ na dwie części nie zmniejsza $\mu(G)$: mamy mniej podziałów do rozważenia, bo mamy więcej $\mathcal{S}$–ścieżek; dodatkowo w drugim przypadku rosną B_i.*

Naszym celem jest udowodnienie twierdzenia Madera.

Twierdzenie 3.19 (Mader)**.** *Maksymalna liczba rozłącznych $\mathcal{S}$–ścieżek wynosi $\mu(G)$.*

Nierówność w jedną stronę jest oczywista: każda $\mathcal{S}$–ścieżka zjada co najmniej jeden wierzchołek U_0 lub co najmniej dwa wierzchołki jakiegoś B_i. Trzeba udowodnić w drugą stronę.

Wpierw udowodnijmy wersję Gallai: prostszą, ale udowodnimy trochę więcej.

Twierdzenie 3.20 (Gallai)**.** *Załóżmy, że każdy zbiór w $\mathcal{S}$ jest jednoelementowy; czyli de facto mamy łączyć różne wierzchołki z $S := \bigcup \mathcal{S}$. Wówczas maksymalna liczba rozłącznych $\mathcal{S}$–ścieżek wynosi $\mu(G)$. Dodatkowo, istnieje zbiór co najwyżej $2\mu(G)$ wierzchołków, które przecinają każdą $\mathcal{S}$–ścieżkę.*

Dowód. Graf $\tilde{G}$ robimy tak: podwajamy wszystkie wierzchołki $V \setminus S$ (kopia v to $\tilde{v}$). Wierzchołek zna swoich sąsiadów, kopie sąsiadów oraz swoją kopię. W tym grafie jest takie trywialne skojarzenie M_0 rozmiaru $|V \setminus S|$: każdy wierzchołek kojarzymy z kopią.

Pokażemy wpierw, że istnieje skojarzenie rozmiaru $c + |V \setminus S|$ wtw istnieje c rozłącznych $\mathcal{S}$–ścieżek. Ze skojarzenia do ścieżek: robimy xora z skojarzeniem M_0, będzie c ścieżek powiększających, i one wyznaczają $\mathcal{S}$–ścieżki. W drugą stronę: te $\mathcal{S}$–ścieżki dają c ścieżek powiększających do M_0.

Użyjemy teraz wzoru Tutte–Berge. Weźmy jakieś $\tilde{U_0}$, niech $\tilde{U_1}, \ldots, \tilde{U_k}$ to będą spójne składowe $\tilde{G} \setminus \tilde{U_0}$. Chcemy pokazać, że

$$|\tilde{U_0}| + \sum_{i=1}^{k} \lfloor \frac{1}{2} |\tilde{U_i}| \rfloor \geqslant \mu + |V \setminus S|. \tag{3.2.1}$$

Po lewej mamy górne ograniczenie na liczbę doskonałych skojarzeń. Z wzoru Tutte–Berge wiemy, że jego minimum spotyka się z licznością najliczniejszego skojarzenia. Jeśli pokażemy powyższą nierówność, to w $\tilde{(G)}$ istnieje skojarzenie rozmiaru $\mu + |V \setminus S|$, czyli μ rozłącznych $\mathcal{S}$–ścieżek.

Zauważmy, że możemy założyć, że w $\tilde{U_0}$ dla każdego $v \in V \setminus S$ albo nie bierzemy ani v ani $\tilde{v}$, albo bierzemy oba: jeśli wzieliśmy tylko jedno, to możemy go usunąć z $\tilde{U_0}$ i zmniejszamy lewą stronę nierówności 3.2.1. Tak więc, v leży w tym samym zbiorze $\tilde{U_i}$ co $\tilde{v}$.

Definiujemy $U_i := \tilde{U_i} \cap V$ dla $i = 0, 1, \ldots, k$. Zauważmy, że wówczas $B_i = U_i \cap S$, bo U_i nie sąsiaduje z U_j dla $1 \leqslant i, j \leqslant k$, $i \neq j$. Czyli

$$|\tilde{U_0}| + \sum_{i=1}^{k} \lfloor \frac{1}{2} |\tilde{U_i}| \rfloor = |U_0| + \sum_{i=1}^{k} \lfloor \frac{1}{2} |U_i \cap S| \rfloor + |V \setminus S| \geqslant \mu + |V \setminus S|.$$

Teraz, załóżmy, że $\tilde{U_i}$ były zbiorami o największym defekcie w $\tilde{G}$. Otrzymujemy równości w nierównościach. W każdym $U_i \cap S$ wybierzmy jeden wierzchołek v_i (o ile istnieje) Oznaczmy

$$X := U_0 \cap \bigcup_{i=1}^{k} (U_i \cap S \setminus \{v_i\}).$$

Zbiór X przecina wszystkie $\mathcal{S}$–ścieżki: w każdym U_i pozostaje co najwyżej jeden wierzchołek z S. Dodatkowo

$$|X| = |U_0| + \sum_{i=1}^{k} \max(0, |U_i \cap S| - 1) \leqslant |U_0| + \sum_{i=1}^{k} 2 \lfloor \frac{1}{2} |U_i \cap S| \rfloor \leqslant 2 \left(|U_0| + \sum_{i=1}^{k} \lfloor \frac{1}{2} |U_i \cap S| \rfloor \right) = 2\mu.$$

□

Teraz możemy udowodnić już twierdzenie Madera, bazując na już udowodnionym twierdzeniu Gallai.

Dowód. Przez sprzeczność. Bierzemy kontrprzykład o najmniejszej liczbie wierzchołków, a spośród tych wybieramy takiego, który minimalizuje

$$|E(G)| - |\{\{t, u\} : t \in T \in \mathcal{S}, u \in U \in \mathcal{S}, T \neq U\}|.$$

Czyli chcemy jak najmniej krawędzi, i jak najwięcej możliwych par wierzchołków do połączenia. Możemy założyć, że rozważamy tylko te zbiory $\mathcal{S}$–ścieżek, które nie zawierają wierzchołków wewnętrznych z $S := \bigcup \mathcal{S}$.

Z twierdzenia Gallai wynika, że w $\mathcal{S}$ jest zbiór T taki, że $|T| \geqslant 2$. Z minimalności, T jest zbiorem niezależnym w G, bo krawędzie w $G[T]$ nie pomagają w $\mathcal{S}$–ścieżkach.

Bierzemy jakiegoś $s \in T$ i dzielimy w $\mathcal{S}$ zbiór T na $T \setminus \{s\}$ i $\{s\}$, otrzymując $\mathcal{S}'$. Z minimalności wynika, że G z $\mathcal{S}'$ spełnia twierdzenie Madera. Co więcej, μ mogło co najwyżej wzrosnąć, a mogliśmy dodać co najwyżej jedną nową ścieżkę do maksymalnego zbioru ścieżek (ścieżkę z s do $T \setminus \{s\}$): więc przy $\mathcal{S}'$ istnieje $\mathcal{P}$: μ rozłącznych $\mathcal{S}$–ścieżek, w tym jedna P_0: prowadząca z s do $T \setminus \{s\}$.

Niech u będzie wierzchołkiem wewnętrznym P_0: istnieje, bo T był zbiorem niezależnym. Teraz zróbmy $\mathcal{S}''$: weźmy $\mathcal{S}$ i dodajmy do T jeszcze wierzchołek u. Podobnie jak poprzednio, przy $\mathcal{S}''$ istnieje $\mathcal{Q}$: μ rozłącznych wierzchołkowo ścieżek, w tym jedna o końcu w u. Wybierzmy $\mathcal{Q}$ takie, by używało jak najmniej krawędzi, które nie są w $\mathcal{P}$. Przypominam o założeniu, że rozważamy tylko zbiory ścieżek, które nie mają wierzchołków wewnętrznych w odpowiednich zbiorach, które łączymy.

W $\mathcal{Q}$ musi istnieć ścieżka Q_0 łącząca u z czymś spoza T. Dodatkowo, skoro $|\mathcal{P}| = |\mathcal{Q}| = \mu$, to w $\mathcal{P}$ istnieje ścieżka P, która ma koniec v, który jest niewykorzystany w $\mathcal{Q}$. Ścieżka P przecina coś z $\mathcal{Q}$: albo to jest P_0, które przecina Q_0, albo można by ją było dołożyć do $\mathcal{Q}$. Niech P przecina ścieżkę $Q \in \mathcal{Q}$ w wierzchołku w i niech to będzie najbliższe v przecięcie P z czymś z $\mathcal{Q}$ (tj. od w do v wierzchołki już nie są wykorzystane w $\mathcal{Q}$).

Po kolej wnioskujemy:

1. $Q \neq P$, bo v jest niewykorzystany w $\mathcal{Q}$.

2. Q nie jest podścieżką P, po jeśliby była, to $Q = Q_0$ (bo P nie może mieć w środku wierzchołków z $\bigcup \mathcal{S}'$). Ale wtedy u jest wewnętrznym wierzchołkiem P, czyli $P = P_0$. Ale w $\mathcal{S}''$ to P_0 zawiera wierzchołki tylko jednego zbioru.

3. U — zbiór w $\mathcal{S}''$, zawierający v. Jeden z końców Q nie jest w U, niech to będzie y. Niech z — drugi koniec. To odcinek Q od w do z leży w P, wpp przekierowywujemy Q od w do v, a nie do z i zmniejszamy liczbę krawędzi spoza $\mathcal{P}$.

4. To odcinek Q od w do y nie zawiera się w całości w P.

5. To w takim razie $z \in U$, bo inaczej symetryczny argument mówi, że odcinek od w do y jednak siedzi w P.

6. To $z \in U$, i z leży na P, czyli P łączy coś $v \in U$ i zawiera $z \in U$, czyli $U = T \cup \{u\}$, $z = u$ i $P = P_0$.

7. No to $Q = Q_0$, skoro zawiera $z = u$.

8. No to wywalamy z Q odcinek od w do $z = u$ i idziemy po P do v i mamy komplet μ ścieżek w $\mathcal{S}$.

$\square$