1 Wykład ósmy — wstęp do teorii minorów — pół wykładu

1.1 Wstępne definicje

(te definicje są tu porządnie napisane, ale można je zrobić tylko na obrazkach, przynajmniej minor, topologiczny minor)

Definicja 1.1. *Porządek częściowy* $(X, \leqslant)$ *nazwiemy* well quasi ordering (WQO)*, jeśli dla każdego nieskończonego ciągu* $x_1, x_2, \ldots$ *elementów* X*, istnieją indeksy* $i < j$*, że* $x_i \leqslant x_j$*.*

Definicja 1.2. *Graf* H *jest* minorem G*, jeśli istnieje rodzina* $(U_h)_{h \in V(H)}$ *niepustych podzbiorów* $V(G)$ *taka, że:*

1. U_h *są parami rozłączne;*
2. $G[U_h]$ *jest spójny dla każdego* $h \in V(H)$*;*
3. *jeśli* $hh' \in E(H)$ *to* $E(U_h, U_{h'}) \neq \emptyset$*.*

Innymi słowy, H *jest minorem* H *jeśli można go otrzymać z* G *poprzez ciąg operacji, z których każda operacja jest*

1. *usunięciem krawędzi;*
2. *usunięciem wierzchołka i wszystkich incydentnych z nim krawędzi;*
3. *ściągnięciem krawędzi* uv*, tj. utożsamieniem* u *i* v*.*

Definicja 1.3. *Graf* G' *jest* podpodziałem G *(ang. subdivision), jeśli powstaje z* G *przez wstawienie ścieżek zamiast niektórych krawędzi. Graf* H *jest* topologicznym minorem G *jeśli* G *zawiera podgraf będący podpodziałem* H*.*

Tu warto zauważyć, że jeśli H jest topologicznym minorem G, to jest również jego minorem.

Definicja 1.4. *Dla grafu* G *dekompozycją drzewową nazwiemy takie drzewo* G *i rodzinę zbiorów wierzchołków* $(V_t)_{t \in T}$*, że:*

(T1) $V(G) = \bigcup_{t \in T} V_t$*;*

(T2) dla każdej krawędzi $uv \in E(G)$ *istnieje* $t \in T$*, że* $u, v \in V_t$*;*

(T3) dla każdego $v \in V(G)$ *zbiór* $\{t : v \in V_t\}$ *(nazwany przez nas na ćwiczeniach* amebą *wierzchołka* v*) jest spójny w* T*.*

Szerokością dekompozycji nazywamy $\max_{t \in T} |V_t| - 1$*. Szerokość drzewiasta (treewidth) grafu to najmniejsza możliwa szerokość dekompozycji.*

1.2 WQO a drzewa

Na ćwiczeniach pokażemy, że następujące warunki są równoważne dla quasi–porządku $(A, \leqslant)$:

1. w każdym ciągu $x_1, x_2, \ldots$ jest para indeksów $i < j$, że $x_i \leqslant x_j$;
2. w $(A, \leqslant)$ nie ma nieskończonego łańcucha i nieskończonego ciągu ściśle malejącego;
3. w każdym ciągu $x_1, x_2, \ldots$ jest nieskończony podciąg niemalejący.

Wpierw zróbmy mały lemat, by zrozumieć, jak działają WQO.

Lemat 1.5. *Jest $(X, \leqslant)$ będzie WQO. Rozszerzmy $\leqslant$ na skończone podzbiory X: $A \leqslant B$ jeśli istnieje włożenie $f : A \to B$ takie, że $a \leqslant f(a)$ dla każdego $a \in A$. Wówczas zbiór skończonych podzbiorów X wraz z $\leqslant$ jest też WQO.*

Dowód. Przez sprzeczność. Konstruujemy minimalny ciąg–kontrprzykład w następujący sposób: mamy już $A_1, A_2, \ldots, A_n$ i dobieramy A_{n+1} tak, by miało jak najmniejszą moc, ale ten prefiks wciąż da się przedłużyć do kontrprzykładu.

Mamy ciąg–kontrprzykład (A_n). Niech $a_n \in A_n$ dowolne, $B_n = A_n \setminus \{a_n\}$. Skoro $(X, \leqslant)$ to WQO, to istnieje podciąg niemalejący (a_n), oznaczmy go $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Weźmy

$$A_0, A_1, \ldots, A_{n_0-1}, B_{n_0}, B_{n_1}, B_{n_2}, \ldots$$

Z minimalności (A_n) ten ciąg nie jest kontrprzykładem. Skoro (A_n) było kontrprzykładem, to musimy mieć $i < j$, że $B_{n_i} \leqslant B_{n_j}$. Ale mamy też $a_{n_i} \leqslant a_{n_j}$, czyli $A_{n_i} \leqslant A_{n_j}$, sprzeczność. □

Teraz w tym samym stylu udowodnimy twierdzenie Kruskala.

Twierdzenie 1.6 (Kruskal 1960)**.** *Klasa drzew z relacją bycia topologicznym minorem jest WQO.*

Dowód. Zawęższmy jeszcze relację bycia topologicznym minorem: załóżmy, że każde drzewo T jest ukorzenione w r_T i $T \leqslant T'$, jeśli mamy podpodział T który jest podgrafem T' tak, że korzenie się pokrywają i zachowany jest porządek od korzenia do liścia.

Robimy ciąg–kontrprzykład $(T_n)_{n\in N}$ jak poprzednio: T_{n+1} jest najmniejszym drzewem takim, że $T_1, T_2, \ldots, T_{n+1}$ jest prefiksem jakiegoś kontrprzykładu. Niech A_n będzie rodziną drzew powstałych przez usunięcie z T_n korzenia; $T \in A_n$ jest ukorzenione w sąsiedzie r_{T_n}. Niech $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, przy czym nie utożsamiamy mu izomorficznych drzew.

Pokażmy, że $(A, \leqslant)$ jest WQO. Niech więc $(T^k)_{k\in N}$ będzie ciągiem drzew z A i niech $n(k)$ będzie indeksem drzewa T_n w którym występuje T^k. Weźmy k takie, że $n(k)$ jest minimalne i spójrzmy na ciąg

$$T_1, T_2, \ldots, T_{n(k)-1}, T^k, T^{k+1}, \ldots$$

Z minimalności (T_n) on nie jest kontrprzykładem, a jedyne miejsce na parę porównywalną jest pod koniec, czyli mamy $T^i \leqslant T^j$ dla $i \leqslant j$.

Z poprzedniego lematu więc skończone podzbiory A też są WQO, czyli w ciągu $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mamy parę $i < j$, że $A_i \leqslant A_j$. No ale to się da przedłużyć na $T_i \leqslant T_j$, sprzeczność. □

Powyższy dowód da się uogólnić na grafy o ograniczonym treewidth. Podajemy je bez dowodu, da się to wyrzeźbić.

Twierdzenie 1.7 (Robertson–Seymour 1990)**.** *Dla każdego k, klasa grafów o treewidth nie większym niż k jest WQO z relacją bycia minorem.*

2 Wykład dziewiąty — charakteryzacja treewidth przez ciernie i splątania

2.1 Ciernie

Naszym celem na najbliższe dwa wykłady jest pokazanie certyfikatów, że graf ma duży treewidth. Zaczniemy od *cierni* (ang. bramble). Mówimy, że $A, B \subset V(G)$ się *dotykają*, jeśli $A \cap B \neq \emptyset$ lub $E(A, B) \neq \emptyset$.

Definicja 2.1. *Rodzinę* $\mathbb{B} = (A_k)_{k=1}^n$ *niepustych podzbiorów* $V(G)$ *nazwiemy* ciernami*, jeśli*

1. $G[A_k]$ *jest spójne dla każdego* k*;*

2. A_k *i* A_j *się dotykają dla każdych* k, j*.*

Element cierni będziemy nazywać gałęzią*. Zbiór* X pokrywa *ciernie* $\mathbb{B}$ *jeśli* $X \cap A_k \neq \emptyset$ *dla każdego* k*.* Rząd *cierni* $\mathbb{B}$ *to wielkość najmniejszego zbioru pokrywającego* $\mathbb{B}$*.*

Zauważmy, że jeśli X i Y pokrywa $\mathbb{B}$ i Z rozdziela X od Y, to Z też pokrywa $\mathbb{B}$: X i Y przecinają A_k, a $G[A_k]$ jest spójne więc Z też przecina A_k.

Wpierw zauważmy, że ciernie o dużym rzędzie uniemożliwiają tworzenie dekompozycji drzewowych o małej szerokości.

Lemat 2.2. *Niech* $\mathbb{B}$ *będzie cierniami i niech* $(T, (V_t)_{t \in T})$ *będzie dekompozycją drzewową* G*. Wówczas istnieje* $t \in T$*, że* V_t *pokrywa* $\mathbb{B}$*.*

Dowód. Załóżmy, że nie. Spójrzmy na krawędź t_1t_2 w T. $V_{t_1} \cap V_{t_2}$ nie pokrywa $\mathbb{B}$, czyli istnieje $B \in \mathbb{B}$ rozłączny z $V_{t_1} \cap V_{t_2}$. Zauważmy, że wszystkie takie B muszą leżeć po tej samej stronie t_1t_2, bo inaczej by się nie dotykały. Skierujmy t_1t_2 w tamtą stronę. Mamy więc $t \in T$, do którego wszystkie krawędzie są skierowane do t. Łatwo widać, że V_t pokrywa $\mathbb{B}$. □

Czyli jeśli mamy ciernie $\mathbb{B}$ o rzędzie k, to treewidth G wynosi co najmniej $k-1$. Pokażemy teraz, że zachodzi implikacja w drugą stronę.

Twierdzenie 2.3 (Seymour–Thomas 1993)**.** *Jeśli graf nie ma ciernii rzędu większego niż* k*, to ma treewidth mniejszy od* k*.*

Dowód. Będziemy dla kolejnych cierni $\mathbb{B}$ konstruować dekompozycję drzewiastą $(T, (V_t)_{t \in T})$ o następującej własności: każdy zbiór V_t, jeśli ma więcej niż k elementów, to nie pokrywa $\mathbb{B}$. Będziemy robić to indukcyjnie w dół, dla coraz mniej licznych cierni. Dla $\mathbb{B} = \emptyset$ daje to tezę twierdzenia, bo wszystko pokrywa $\emptyset$.

Weźmy więc $\mathbb{B}$ i załóżmy, że dla większych ciernii mamy takie dekompozycje. Niech X pokrywa $\mathbb{B}$ i będzie najmniejsze możliwe; $|X| \leqslant k$. Weźmy C — spójna składowa $G[V \setminus X]$. Chcemy skonstruować „dobrą" dekompozycję $G[X \cup V(C)]$ taką, by X był jednym z węzłów dekompozycji. Dla każdego C utożsamimy X-y w tych dekompozycjach i będzie dobrze.

Weźmy $\mathbb{B}' = \mathbb{B} \cup \{V(C)\}$. Jeśli to nie są ciernie, to $V(C) \cup N(C)$ nie pokrywa $\mathbb{B}$ i możemy wziąć trywialną dekompozycję X i $V(C) \cup N(C)$.

W takim razie $\mathbb{B}'$ to ciernie, i w dodatku większe od $\mathbb{B}$, bo $V(C) \notin \mathbb{B}$. Z założenia indukcyjnego weźmy $(T, (V_t))$ — dobrą dekompozycję dla $\mathbb{B}'$. Chcemy ją poprawić do dobrej dekompozycji dla $\mathbb{B}$ na $V(C) \cup X$.

Jak już jest dobra, to fajnie. A jak nie, to jest węzeł V_s taki, który jest większy niż k i pokrywa $\mathbb{B}$. On nie pokrywa $\mathbb{B}'$, czyli $V_s \cap V(C) = \emptyset$.

Ogólnie, chcielibyśmy wziąć dekompozycje drzewową $V_t \cap V(H)$, gdzie $H = G[V(C) \cup X]$. To jest dekompozycja drzewowa H, i co więcej dobra, bo była dobra dla $\mathbb{B}'$, ale może nie zawierać X. Chcemy ją poprawić tak, by zawierała X.

Puszczamy Mengera (przepływ wierzchołkowy) z X do V_s. Oba pokrywają $\mathbb{B}$ i X ma minimalną wielkość, więc będziemy mieli $\ell = |X|$ ścieżek P_i. Możemy założyć, że P_i zaczyna się w $x_i \in X$ i nie dotyka poza tym X. Bierzemy $W_t = V_t \cap V(H)$ i dorzucamy do W_t wszystkie te x_i takie, że t leży na ścieżce z s do $\{t' : x_i \in V_{t'}\}$ w drzewie T. Innymi słowy, przeciągamy x_i z tego, gdzie leży w T: $\{t' : x_i \in V_{t'}\}$ aż do V_s.

Po pierwsze zauważmy, że $|V_t| \geqslant |W_t|$: do V_t dodaliśmy parę x_i, ale dla każdego dodanego x_i wypadło coś ze ścieżki P_i, bo ona musiała przecinać V_t bo prowadziła od V_s do x_i. Łatwo widać, że jest to dekompozycja drzewiasta, bo przeszliśmy do pografu (było na ćwiczeniach), a następnie spójnie podorzucaliśmy x_i do paru wierzchołków T. Mamy też $W_s = X$. Pozostaje pokazać, że jest to dobra dekompozycja dla $\mathbb{B}$.

Niech $|W_t| > k$. Skoro $|X| \leqslant k$, to W_t przecina $V(C)$. $|V_t| \geqslant |W_t|$, i V_t też przecina $V(C)$, więc V_t nie przecina jakiegoś $B \in \mathbb{B}$. Jeśli W_t go przecina, to dlatego, że jakiś $x_i \in B \cap W_t$. Ale V_t jest na drodze w T pomiędzy V_s a miejscem, gdzie występuje x_i, oba te zbiory przecinają B, więc i V_t przecina, sprzeczność. □

2.2 Splątania

Definicja 2.4. *$X \subset V(G)$ jest zewnętrznie k–spójny, jeśli $|X| \geqslant k$ i dla każdych rozłącznych $Y, Z \subset X$, $|Y| = |Z| \leqslant k$ istnieje $|Y|$ rozłącznych wierzchołkowo ścieżek łączących Y z Z, nie używających wierzchołków i krawędzi $G[X]$ (poza początkiem i końcem).*

Na ćwiczeniach pokażemy, że jeśli graf zawiera duży zbiór zewnętrznie k–spójny, to ma duży treewidth. Teraz chcemy pokazać implikację w drugą stronę, ale będzie trochę subtelniejsza.

Definicja 2.5. *Parę (A, B) podgrafów G nazwiemy k–*splątaniem*, jeśli w A można wyróżnić podgraf T będący drzewem taki, że*

1. *T nie ma wierzchołków o stopniu większym niż 3;*
2. *każdy wierzchołek $V(A) \cap V(B)$ należy do T i ma stopień nie większy niż 2;*
3. *T ma wierzchołek stopnia nie większego niż 1 w $V(A) \cap V(B)$;*
4. *$V(A) \cap V(B)$ jest zewnętrznie k–spójny w podgrafie B.*

Rzędem (A, B) *nazwiemy* $|V(A) \cap V(B)|$. *Jeśli pominiemy ostatni warunek, to co dostaniemy nazywamy* 0–splątaniem.

Lemat 2.6. *Niech $h \geqslant k \geqslant 1$. Jeśli G nie zawiera k–splątania o rzędzie h to ma treewidth co najwyżej $h + k - 1$.*

Dowód. Będziemy robić coraz większy zbiór wierzchołków $U \subset V(G)$ i dla $G[U]$ trzymać dekompozycję drzewową o szerokości $h + k - 1$. Dodatkowo, będziemy utrzymywać następujący niezmiennik. Niech C będzie spójną składową $G[V(G) \setminus U]$. Oznaczmy $\hat{C} = G[V(C) \cup N(C)]$. Chcemy, by $N(C)$ zawierało się w jednym wierzchołku dekompozycji $G[U]$ oraz dodatkowo $(G \setminus C, \hat{C})$ tworzyło 0–*splątanie* rzędu co najwyżej h.

Weźmy $x \in V(G)$ taki, że po usunięciu x w G nie rośnie liczba spójnych składowych. Zaczynamy od $U = \{x\}$, widać, że jest OK.

Mamy więc jakiegoś $U \neq V(G)$ i chcemy go powiększyć. Weźmy C — jakąś spójną składową $G[V(G) \setminus U]$. Niech $X = N(C) \subset U$.

Przypadek 1: $|X| < h$**.** Spójrzmy na 0–*splątanie* $(G \setminus C, \hat{C})$. Z warunków na splątanie mamy drzewo T i $v \in X$ taki, że jest liściem T (lub $T = \{v\}$). Niech $u \in C$ sąsiad X. Dodajemy u do U. Do dekompozycji dodajemy wierzchołek ze zbiorem $X \cup \{u\}$, jako liść, połączony z tym, co zawierało X. Nie zmieniamy nic w splątaniach dla C' rozłącznych z C. Za to jeśli mamy teraz w nowym U spójną składową $C' \subset C$, to bierzemy to samo T co było, ale dodajemy krawędź uv. Mamy nowe 0–splątanie i jego rząd jest o co najwyżej 1 większy od poprzedniego.

Przypadek 2: $|X| = h$**.** Nie możemy teraz tak łatwo dodać tego u. Ale $(G \setminus C, \hat{C})$ nie może być k–splątaniem. Mamy na to świadków: rozłączne $Y, Z \subset X$, $|Y| = |Z| = \ell \leqslant k$ takie, że nie można puścić ℓ rozłącznych wierzchołkowo ścieżek od Y do Z, omijając wierzchołki i krawędzie $G[X]$. Stosujemy Mengera: w szczególności, istnieje $S \subset V(C)$ rozcinający w $H = G[V(C) \cup Y \cup Z] - E(G[Y \cup Z])$ wierzchołki z Y od Z i $|S| < \ell \leqslant k$.

Chcę powiększyć U o S, dodając do dekompozycji zbiór $X \cup S$ podłączony do zbioru zawierającego X. To będzie dobra dekompozycja, pytanie tylko o splątania. Dla nowych C' rozłącznych z C będzie dobrze, jak poprzednio. A co jak C' jest podgrafem C?

C' jest pografem H i musi leżeć po jednej ze stron S, bo S dzieliło H na część zawierającą Y i część zawierającą Z. Załóżmy, że C' leży w części z Z. To $N(C') \subset S \cup X \setminus Y$, czyli ma wielkość co najwyżej h. By uzupełnić 0–splątanie, weźmy drzewo T od splątania $(G \setminus C, \hat{C})$ i pociągnijmy rozłączne ścieżki od Y do S i dodajmy je do T. Rzeczy z Y miały stopień $\leqslant 2$, to teraz mają stopień w T nie większy niż 3 i jest dobrze.

Czyli jesteśmy w stanie dojść do $U = V(G)$, koniec. □

3 Wykład dziesiąty — twierdzenie o kracie

Spójrzmy na klasę H–minor–free dla ustalonego H i zastanówmy się, jak duży treewidth mogą mieć te grafy. Jeśli H nie jest planarne, to do H–minor–free należą wszystkie grafy planarne, w szczególności wszystkie kraty, czyli treewidth jest nieograniczony. Z drugiej strony, jeśli H jest planarny, to w H–minor–free nie ma dużych krat. Celem dzisiejszego wykładu jest pokazanie, że w związku z tym treewidth musi być ograniczony. Udowodnimy dziś, że

Twierdzenie 3.1 (Robertson–Seymour 1986)**.** *Istnieje funkcja $f(r)$ taka, że dla każdego $r > 0$ jeśli graf ma treewidth co najmniej $f(r)$, to krata $r \times r$ jest jego minorem.*

My pokażemy to dla ogólnych G i f będącego bardzo szybko rosnącą funkcją: $2^{poly(r)}$. Warto zaznaczyć — z czego będziemy korzystać na następnym wykładzie — że jeśli ustalimy H i G jest w klasie H–minor–free, to wystarczy $f(r) = c(H)r$ — funkcja liniowa! W szczególności dla grafów planarnych wystarczy $c = 4$.

Teraz pora pokazać, skąd będziemy brać duże kraty jako minory.

Lemat 3.2. *Niech $d, r \geqslant 2$ i niech d będzie duże (np. $d > 2r^{2r+2}$). Załóżmy, że w G mamy rodzinę $\mathcal{H}$ złożoną z $r^2 - 1$ rozłącznych wierzchołkowo ścieżek oraz rodzinę $\mathcal{V} = \{V_1, V_2, \ldots, V_d\}$ złożoną z d rozłącznych wierzchołkowo ścieżek. Co więcej, załóżmy że każda ścieżka z $\mathcal{H}$ przecina każdą ścieżkę z $\mathcal{V}$. Co więcej, załóżmy, że na każdej ścieżce $H \in \mathcal{H}$ przecięcia ze ścieżkami V_i następują po kolei: wpierw przecina V_1 (być może pare razy), następnie V_2, itd., na końcu V_d. Wówczas krata $r \times r$ jest minorem G.*

Dowód. Znajdziemy ten minor dość brutalnie. Dla każdego V_i patrzymy, jak on łączy różne $H \in \mathcal{H}$. Robimy graf G_i, gdzie $\mathcal{H}$ jest zbiorem wierzchołków i H łączy się z H', jeśli V_i przecina

H i zaraz po tym przecina H'. Wybieramy w G_i dowolne drzewo rozpinające, i w tym drzewie, z zadania z ostatnich ćwiczeń, wybieramy zbiór r liści lub ścieżke o r wierzchołkach.

Z Dirichleta, istnieje r^2 ścieżek V_i, którym wybierzemy to samo: albo ten sam zbiór liści, albo tę samą ścieżkę. Bez straty ogólności powiedzmy, że to jest $V_1, V_2, \dots, V_{r^2}$ i ta ścieżka lub zbiór liści to $H_1, H_2, \dots, H_r$. Ścieżki $H_1, H_2, \dots, H_r$ to będą poziome paski mojej kraty.

Teraz biorę $V_1, V_2, \dots, V_r$ i z nich robię pierwszy pionowy pas kraty. Przy pomocy V_1 łączę H_1 z H_2. Przy pomocy V_2 łączę H_2 z H_3. Itd. V_r wogóle olewam. Następnie przy pomocy $V_{r+1}, \dots, V_{2r}$ robię drugi pionowy pas kraty. I gotowe. $\square$

Pora przejść do dowodu głównego twierdzenia. Pokażemy trochę inną wersję; oryginalna wersja będzie tą dla $m = r^2$.

Twierdzenie 3.3. *Niech $r > 1$ i $2 \leqslant m \leqslant r^2$. Niech G ma treewidth co najmniej $\Omega(r^{4m^2(r+2)})$. Wówczas G zawiera kratę $r \times r$ lub K_m jako minor.*

Dowód. W dowodzie nie będę dokładnie liczył stałych (są w Diestlu, twierdzenie 12.4.4), raczej będę argumentował, że jest czegoś (wciąż) bardzo dużo. Weźmy $c = 2r^{4(r+2)}$ i $k = c^{2\binom{m}{2}}$. Treewidth jest duży, więc mamy k–splątanie (A, B) rzędu co najmniej $(m + 1)(2k - 1)$. Niech T będzie drzewem w tym splątaniu, a $X = V(A) \cap V(B)$. Z zadania z ćwiczeń, możemy w T wyciąć m rozłącznych wierzchołkowo poddrzew takich, że każde z nich zawiera co najmniej k wierzchołków z X.

Niech $A_1, A_2, \dots, A_m$ będą zbiorami wierzchołków tych poddrzew. Z definicji k–splątania, dla każdego $1 \leqslant i < j \leqslant m$ mamy co najmniej k rozłącznych wierzchołkowo ścieżek między A_i a A_j. Oznaczmy je $\mathcal{P}_{ij}$

Intuicja na dalej: jeśli z każdego $\mathcal{P}_{ij}$ wybierzemy po ścieżce tak, by te ścieżki się nie przecinały, zwijając ścieżki do krawędzi i A_i do wierzchołków, otrzymamy K_m jako minor. Jeśli nam się nie uda to oznacza, że dla jakiś ij i pq mamy bardzo dużo przecięć między $\mathcal{P}_{ij}$ a $\mathcal{P}_{pq}$ i z tych ścieżek wybierzemy coś, co spełnia założenia poprzedniego lematu. Jednak ten wybór będzie musiał być dość subtelny.

Ponumerujmy wszystkie pary ij, $1 \leqslant i < j \leqslant n$ liczbami od 0 do $\binom{m}{2} - 1$, niech ta numeracja to będzie σ. Chcemy kolejno dla każdego $\ell = 0, 1, \dots, \binom{m}{2}$ ulepszać $\mathcal{P}_{ij}$ tak, by: (oznaczmy pq takie, że $\sigma(pq) = \ell$, jeśli $\ell < \binom{m}{2}$; dodatkowo graf H_{ij} to graf złożony z wszyskich ścieżek z $\mathcal{P}_{ij}$):

1. $\mathcal{P}_{ij}$ to zbiór rozłącznych wierzchołkowo ścieżek od A_i do A_j, które widzą A tylko na końcach.
2. dla ij takich, że $\sigma(ij) < \ell$ (już przetworzone), mamy dokładnie jedną ścieżkę w $\mathcal{P}_{ij}$ i ta ścieżka nie przecina ścieżek z innych $\mathcal{P}_{xy}$.
3. dla pq mamy w $\mathcal{P}_{pq}$ dokładnie $k/c^{2\ell}$ ścieżek.
4. dla ij nieprzetworzonych, tj. $\sigma(ij) > \ell$ mamy w $\mathcal{P}_{ij}$ dokładnie $k/c^{2\ell+1}$ ścieżek.
5. dla ij nieprzetworzonych, tj. $\sigma(ij) > \ell$, ścieżki które pozostały w $\mathcal{P}_{ij}$ spełniają następujący warunek maksymalizacyjny: jeśli $e \in E(H_{ij}) \setminus E(H_{pq})$, to w grafie $H_{pq} \cup H_{ij} \setminus e$ nie ma $k/c^{2\ell+1}$ ścieżek od A_i do A_j; intuicyjnie, $\mathcal{P}_{ij}$ chodzi wzdłuż ścieżek $\mathcal{P}_{pq}$ jak tylko może.

Wpierw pokażmy, że możemy zawsze zrobić pierwszy krok dla $\ell = 0$. Niech $\sigma(pq) = 0$ i bierzemy za $\mathcal{P}_{pq}$ wszystkie k ścieżek które mamy. Teraz trzeba przyciąć pozostałe $\mathcal{P}_{ij}$ tak, by spełniały nasze postulaty, w szczególności ostatni punkt. Popatrzmy na $H_{ij} \cup H_{pq}$: jest tam k rozłącznych wierzchołkowo ścieżek z A_i do A_j, a po wywaleniu $E(H_{ij}) \setminus E(H_{pq})$ już nie będzie żadnej. Wywalmy z niego jak największy zbiór krawędzi $F \subset E(H_{ij}) \setminus E(H_{pq})$ tak, by pozostało k/c ścieżek. Te pozostałe k/c ścieżek tworzą dobry nowy $\mathcal{P}_{ij}$: wywalimy cokolwiek więcej i już nie będzie.

Podobnie możemy zrobić krok do następnego ℓ, jeśli tylko mamy w $\mathcal{P}_{pq}$ taką ścieżkę P, która omija co najmniej $|\mathcal{P}_{ij}|/c$ ścieżek z $\mathcal{P}_{ij}$ dla każdego $\sigma(ij) > \ell$. Bierzemy tę P jako jedyną ścieżkę w $\mathcal{P}_{pq}$, a dalsze ścieżki przycinamy jak poprzednio: w kolejnym $\mathcal{P}_{ij}$ zostawiamy $k/2^{2\ell+2}$ ścieżki, a dalsze przycinamy definiując tak samo F.

Jeśli doszliśmy do końca z ℓ, to mamy K_m jako minor. W przeciwnym przypadku coś nam się po drodze nie udało, czyli mamy ustalone ℓ, $\sigma(pq) = \ell$, i każda ścieżka z $\mathcal{P}_{pq}$ omija mniej niż $|\mathcal{P}_{ij}|/c$ ścieżek z któregoś nieprzetworzonego $\mathcal{P}_{ij}$. Mamy więc dużo $(k/c^{2\ell}/\binom{m}{2})$ takich ścieżek, co omijają mało w tym samym $\mathcal{P}_{ij}$, więc ustalmy to pechowe ij i ten zbiór mało omijających ścieżek $\mathcal{P}$.

Robimy graf dwudzielny: z jednej strony mamy ścieżki $\mathcal{P}$, a z drugiej $\mathcal{P}_{ij}$. Łączymy je krawędzią, jeśli są rozłączne; mamy mało krawędzi: $|\mathcal{P}| \cdot |\mathcal{P}_{ij}|/c$, czyli średni stopień wierzchołka po stornie $\mathcal{P}_{ij}$ wynosi co najwyżej $|\mathcal{P}|/c$. Zachłannie wybierając r^2 wierzchołków o minimalnym stopniu dostaniemy $\mathcal{H}$ — zbiór r^2 ścieżek z $\mathcal{P}_{ij}$, i $\mathcal{V} = \mathcal{P} \setminus N(\mathcal{H})$ mocy co najmniej $|\mathcal{P}|/2$. Każda ścieżka z $\mathcal{H}$ przecina każdą z $\mathcal{V}$.

Widać, że mamy już zaczątki tego, co potrzeba do lematu o kracie ze ścieżek, ale te ścieżki wciąż tworzą niezłą plątaninę. Uporządkujmy je. Weźmy sobie ustalone $Q \in \mathcal{H}$ jako ośkę.

Jak kolejne $V \in \mathcal{V}$ przecinają Q? Przychodzą, idą przez kilka wierzchołków wspólnie, i odchodzą. Pomiędzy nimi jest co najmniej jedna krawędź przerwy. Bierzemy duże $d = \sqrt{c}/m$ tak, że mamy $|\mathcal{V}| \geqslant d^2|\mathcal{P}_{ij}|$ (przypominam, że $|\mathcal{P}_{pq}| = c|\mathcal{P}_{ij}|$) i dzielimy Q na d kawałków $Q_1, Q_2, \ldots, Q_d$, każda taka, że w $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ odwiedza nas dokładnie $nd|\mathcal{P}_{ij}|$ różnych ścieżek z $\mathcal{V}$ i niech e_n będzie krawędzią zaraz za Q_n.

Zauważmy, że e_n jest krawędzią z $\mathcal{P}_{ij}$, ale nie z $\mathcal{P}_{pq}$, bo jest incydentna ze ścieżką z $\mathcal{V}$, ale nią nie idzie. Czyli po wywaleniu e_n nie będzie $|\mathcal{P}_{ij}|$ ścieżek od A_i do A_j w grafie $H_{ij} \cup H_{pq}$. No to, z twierdzenia Mengera, jest bloker S_n wielkości $|\mathcal{P}_{ij}| - 1$. Co więcej, z ścieżek z $\mathcal{P}_{ij}$ krawędź e_n rozwaliła tylko Q, czyli każda ścieżka z $\mathcal{P}_{ij}$, a więc i każda z $\mathcal{H}$, zawiera dokładnie jeden wierzchołek S_n.

Mamy $|\bigcup_{n=1}^{d} S_n| < d|\mathcal{P}_{ij}|$, więc każdy Q_n spotyka ścieżkę $V_n \in \mathcal{V}$, co nie trafia $\bigcup S_n$. Pokażemy, że V_n są dobre do lematu o kracie.

Zauważmy, że V_n przecina każdą ścieżkę z $\mathcal{H} \setminus \{Q\}$ przed S_n, bo inaczej dałoby się przejść od A_i do A_j: wpierw po Q, potem to V_n, a potem po tej ścieżce. Analogicznie, V_n przecina każdą taką ścieżkę po S_{n-1}. Czyli S_n rozdzielają V_n, czyli to pasuje do lematu o kracie ze ścieżek. $\square$

4 Wykład jedenasty — szkic dowodu twierdzenia Robertsona-Seymoura i wybrane zastosowania

Pora teraz sformułować największe twierdzenie tej teorii.

Twierdzenie 4.1 (Robertson–Seymour 1986–2004). *Skończone grafy są WQO z relacją bycia minorem.*

Spójrzmy na to z tej strony: jeśli mamy klasę grafów zamkniętą na branie minorów (np. grafy planarne) to można ją scharakteryzować przez skończony zbiór wykluczonych minorów.

W szczególności, będą nas nieraz interesowała klasa grafów H–minor–free, czyli grafy które nie mają ustalonego grafu H jako minora.

4.1 Szkic dowodu twierdzenia Robertsona–Seymoura

To rozumowanie jest bardzo bardzo w powietrzu i macha rękami, ale moim zdaniem ciekawie jest zobaczyć, jak wygląda ten wielki dowód z wielkiej perspektywy. To jest Diestel 339-340 i 347–348.

4.1.1 Charakteryzacja K_m–minor–free

Mamy ciąg grafów $G_0, G_1, \ldots$ i chcemy pokazać, że istnieją indeksy $i < j$, że G_i jest minorem G_j. Załóżmy przez sprzeczność, że nasz ciąg jest zły. Wówczas grafy $G_1, G_2, \ldots$ nie mają G_0 jako minora.

Wpierw uwaga: jeśli G_0 jest planarny, to jesteśmy w domu. Jak pokazywaliśmy na poprzednim wykładzie, istnieje $k = k(G_0)$ takie, że jeśli graf nie ma G_0 jako minora, to ma treewidth nie większy niż k. A dla klasy grafów o ograniczonym treewidth już mówiliśmy, że jest dobrze — rozszerzenie tw. Kruskala.

Niech więc G_0 dowolny i niech $m = |V(G_0)|$. Wówczas grafy $G_1, G_2, \ldots$ nie mają K_m jako minora — możemy rozważać tylko przypadek $G_0 = K_m$. Fajnie byłoby mieć jakieś strukturalne twierdzenie: jeśli graf nie ma K_m jako minora, to cośtam cośtam. Podamy właśnie takie twierdzenie, ale jest dość skomplikowane i wymaga kilku definicji. (te definicje to Diestel, 339–340)

Definicja 4.2. *Mając graf G i jego dekompozycję drzewową $(T, (V_t)_{t \in T})$,* korpusem *dla $t \in T$ nazwiemy graf H_t, konstruowany następująco: bierzemy $G[V_t]$ i dodajemy wszystkie krawędzie xy dla $x, y \in V_{t'}$ i tt' jest krawędzią T.*

Mówiąc *powierzchnia*, mamy na myśli dwuwymiarową łukowo spójną zwartą rozmaitość.

Definicja 4.3. *Zbiór powstały z usunięcia z powierzchni S k kół o brzegach $C_1, C_2, \ldots, C_k$ oznaczymy $S \setminus k$ (te powierzchnie są homeomorficzne, niezależnie gdzie wytniemy kółka). Na każdym C_i oznaczmy jeden punkt jako korzeń, a resztę tego okręgu uporządkujemy w jedną ze stron w liniowy porządek. Tak uporządkowane okręgi nazwiemy* mankietami *(ang. cuffs).*

Definicja 4.4. *Powiemy, że graf H jest k–prawie zanurzalny w powierzchni S, jeśli po usunięciu co najwyżej k wierzchołków graf H można zapisać jako $H_0 \cup H_1 \cup H_2 \ldots \cup H_k$ (rozłożyć, znaczy każda krawędź się musi gdzieś znaleźć, niekoniecznie tylko raz; grafy H_i mogą być puste) tak, że:*

(N1) H_0 można zanurzyć w $S \setminus k$ tak, by wierzchołki H_0 trafiały tylko na mankiety $C_1, C_2, \ldots, C_k$ i nie trafiały w korzenie mankietów.

(N2) Grafy $H_1, H_2, \ldots, H_k$ są parami rozłączne i $H_0 \cap H_i$ to dokładnie te wierzchołki H_0, które wylądowały na C_i.

(N3) Grafy H_i, $i \geqslant 1$, mają ścieżkową dekompozycję (tj tą od path–width) o szerokości co najwyżej k i co więcej taką, że zbiory dekompozycji są indeksowane wierzchołkami $H_0 \cap H_i$, i kolejność na ścieżce odpowiada kolejności na mankiecie C_i.

Intuicyjnie chodzi o to, H, po wywaleniu kilku wierzchołków, można narysować na S tak jak H_0, a na każdym mankiecie C_i mamy „zgrubienia” o szerokości k — grafy H_i.

Pora przejść do twierdzenia o charakteryzacji.

Twierdzenie 4.5 (Robertson–Seymour, 2003)**.** *Dla każdego m istnieje $k = k(m)$ takie, że każdy graf G nie posiadający K_m jako minora ma drzewową dekompozycję, której korpusy są k–prawie zanurzalne w powierzchnię, w którą K_m się nie zanurza.*

Dajmy tutaj dwie uwagi. Po pierwsze, jeśli tt' jest krawędzią w tej dekompozycji, to $|V_t \cap V_{t'}| \leqslant f(k,m)$, gdyż $V_t \cap V_{t'}$ tworzy klikę w korpusie H_t — jeśli ta klika będzie za duża, to będzie ją tak samo trudno gdzieś zanurzyć jak K_m.

Po drugie, możemy rozważać tylko dwie powierzchnie, a nie wszystkie w których K_m się nie zanurza: nieorientowalną i orientowalną, o największym możliwym genusie. Ogólnie, tych w których K_m się nie zanurza, jest skończenie wiele: odpowiednio wiele rączek przy sferze lub płaszczyźnie rzutowej daje możliwość narysowania K_m.

4.1.2 Od charakteryzacji do twierdzenia dla grafów zanurzalnych w powierzchni S

Mamy więc ciąg grafów wykluczających K_m jako minor, m jest ustalone, i mamy powyższe twierdzenie strukturalne. Teraz wykonujemy następujące kroki:

1. Dla każdego grafu G_i, patrzymy na zbiór korpusów dla tej ustalonej dekompozycji drzewowej. Chcemy pokazać, że zbiór wszystkich korpusów jest WQO. Wówczas istnieje nadzieja, że uda się przepchać coś w stylu dowodu tw. Kruskala i będziemy mieli, że grafy G_i tworzą WQO. Pomocny w przepychaniu dowodu tw. Kruskala będzie fakt, że w tych dekompozycjach $V_t \cap V_{t'}$ jest ograniczone.

2. Mamy więc korpusy: zbiór grafów k–prawie zanurzalnych w jedną ze skończenie wiele powierzchnii, w które K_m się nie zanurza. Wybierzmy jedną z tych powierzchni — S — w którą k–prawie zanurza się nieskończenie wiele korpusów.

3. Spójrzmy na definicję k–prawie zanurzenia. Wpierw wywalamy k wierzchołków — to pewnie da się załatać, bo ich jest mało. Następnie mamy te grafy H_i, dla $i \geqslant 1$. Ale one mają mały pathwidth, one pewnie się dobrze zachowują: mamy twierdzenie już udowodnione dla ograniczonego treewidthu.

4. Tak więc, jeśli udowodnimy, że dla ustalonej powierzchni S, klasa grafów zanurzalnych w nią jest WQO, to to będzie większość pracy: resztę się jakoś dorobi technikami, które już umiemy.

4.1.3 Indukcja dla grafów zanurzalnych w S

Chcemy udowodnić, że jeśli mamy ustaloną powierzchnię S, to klasa grafów zanurzalnych w nią, z relacją minorów, jest WQO.

Zauważmy, że dla S będącego sferą już mamy udowodnione, bo nasza klasa grafów to grafy planarne. Przypomnijmy: wykluczając graf planarny jako minor, wykluczamy dużą kratę jako minor, czyli ograniczamy treewidth.

Robimy indukcję po genusie S, bazę indukcji właśnie pokazaliśmy. Mamy ciąg $H_0, H_1, H_2, \ldots$ zanurzalny w S, czyli jak poprzednio, mamy ciąg $H_1, H_2, \ldots$, który nie ma H_0 jako minora.

Dowodzimy następującego twierdzenia charakteryzacyjnego — znów mamy klasę H_0–minor–free, ale tym razem jeszcze mamy zanurzenia w S.

Twierdzenie 4.6. *Jeśli H_i nie zawiera H_0 jako minora i oba grafy zanurzają się w S, to H_i ma takie zanurzenie w S, że: istnieje okrąg C_i na S, który jest nietrywialnym elementem grupy podstawowej S (po ludzku: nie odcina dysku z S), że w zanurzeniu C_i nie przecina żadnej krawędzi H_i i na C_i leżą wierzchołki X_i, $|X_i| \leqslant f(S, H_0)$.*

Bierzemy H_i, zanurzamy je zgodnie z powyższym twierdzeniem, i rozcinamy S wzdłuż C_i. Powstanie nam jeden kawałek $S \setminus C_i$ z dwoma dziurami lub dwa spójne kawałki $S \setminus C_i$ każda z jedną dziurą. Zalepiamy dziury dyskami: mamy jedną lub dwie powierzchnie, o mniejszym genusie niż S. Wybierzmy podciąg H_i gdzie wychodzi to samo: tyle samo powierzchni i takie same powierzchnie (powierzchni o mniejszym genusie niż S jest skończenie wiele).

Jeśli mamy jedną powierzchnię S_0, to mamy $H_i \setminus X_i$ zanurzone w S_0. Z założenia indukcyjnego jest dobrze, a $|X_i| \leqslant f(S, H_0)$, i to się da dosztukować.

W przeciwnym wypadku mamy powierzchnie S' i S'' i rozcieliśmy H_i na dwa podgrafy H_i' i H_i'', $V(H_i') \cap V(H_i'') = X_i$. Z założenia indukcyjnego, wszystkie H_i' są WQO i wszystkie H_i'' są WQO. Robiąc znów argument, jak w pierwszym lemacie z WQO, mamy, że pary (H_i', H_i'') tworzą WQO; możemy jeszcze przez ten argument przemycić, jak wygląda X_i w tej parze, bo $|X_i|$ jest mała.

I koniec.

4.2 Przykłady zastosowań w algorytmice

4.2.1 Klasy zamknięte na branie minorów

Wpierw zacytujmy ważny fakt algorytmiczny

Twierdzenie 4.7. *To, czy H jest minorem G można stwierdzić w czasie $f(|V(H)|)|V(G)|^3$.*

Czyli, dla ustalonego (małego) grafu H testowanie, czy H jest minorem G można robić w czasie wielomianowym. Funkcja f tutaj jest paskudnie szybko rosnąca.

Zauważmy następujący fakt

Twierdzenie 4.8. *Niech $\mathcal{F}$ będzie klasą grafów zamkniętą na branie minorów. Istnieje wielomianowy, ba, $O(|V(G)|^3)$, algorytm testujący, czy $G \in \mathcal{F}$.*

Dowód. Z twierdzenia o minorach wiemy, że $\mathcal{F}$ można scharakteryzować przez skończony zbiór zabronionych minorów. Możemy więc G algorytmem z poprzedniego twierdzenia przetestować na każdy z tych zabronionych minorów. □

Wniosek 4.9. *Niech M będzie rozmaitością gładką zwartą. Testowanie, czy G da się narysować na M można zrobić w czasie $O(|V(G)|^3)$.*

Dowód. Klasa grafów, które da się narysować na M jest zamknięta na branie minorów. □

Oczywiście, te wyniki są mega–niekonstruktywne, a stałe schowane w $O()$ są ogromne. W ten sposób da się dowodzić istnienia algorytmów i taki dowód jest zazwyczaj dobrym impulsem by usiąść na tyłku i (rozpisawszy na to grant naukowy) wymyśleć normalny algorytm dla badanej klasy $\mathcal{F}$.

4.2.2 Trzy słowa o szukaniu optymalnej dekompozycji drzewowej

Na poprzednich ćwiczeniach zobaczyliśmy, że mając dekompozycję drzewową o szerokości t, można wiele problemów NP–trudnych rozwiązywać w czasie $f(t)|V(G)|^{O(1)}$, zazwyczaj jakimś programowaniem dynamicznym. Optymalnych dekompozycji grafu można szukać kilkoma algorytmami, zależnie od tego jak dokładnie go potrzebujemy. Ogólnie, znalezienie treewidthu grafu jest NP–trudne.

Twierdzenie 4.10 (Bodlaender)**.** *Istnieje algorytm, który dla danego grafu G i liczby t w czasie $2^{O(t^3)}|V(G)|$ konstruuje dekompozycję drzewową G o szerokości co najwyżej t lub mówi, że taka nie istnieje.*

Twierdzenie 4.11. *Istnieje algorytm, który dla danego grafu G i liczby t w czasie $O(t3^{3t}|V(G)|^2)$ konstruuje dekompozycję drzewową G o szerokości co najwyżej $4t+1$ lub mówi, że treewidth G wynosi więcej niż t.*

Twierdzenie 4.12. *Istnieje algorytm, który dla danego grafu G i liczby t w czasie wielomianowym konstruuje dekompozycję drzewową G o szerokości co najwyżej $O(t\sqrt{\log t})$ lub mówi, że treewidth G wynosi więcej niż t.*

Jeśli więc mamy algorytm o złożoności $c^t n^{O(1)}$, warto zastosować środkowy algorytm: treewidth nam się pogorszy o stałą, ale wciąż złożoność będzie $c^t n^{O(1)}$.

4.2.3 Bidimensionality

Rozważmy problem pokrycia wierzchołkowego w grafach planarnych: mamy graf planarny G i liczbę k: czy w G istnieje pokrycie wierzchołkowe rozmiaru k?

Zróbmy następujący algorytm:

1. Puśćmy algorytm 4–aproksymacyjny dla $t = 8\sqrt{k}$.
2. Jeśli zwrócił nam on dekompozycję o szerokości co najwyżej $32\sqrt{k}+1$, to odpalamy prostego dynamika — zrobimy na ćwiczeniach.
3. W przeciwnym przypadku, z twierdzenia mamy kratę $2\sqrt{k} \times 2\sqrt{k}$ jako minor.
4. Obserwacja: jeśli H jest minorem G, to pokrycie wierzchołkowe w G się dobrze rzutuje na pokrycie wierzchołkowe w H.
5. Krata $2\sqrt{k} \times 2\sqrt{k}$ potrzebuje co najmniej $2k$ wierzchołków w pokryciu wierzchołkowym, bo ma takiej wielkości skojarzenie. Czyli odpowiedź NIE.

Działa on w czasie $2^{O(\sqrt{k})} n^{O(1)}$. To całkiem szybko, jak na NP–trudny problem pokrycia wierzchołkowego.

Zauważmy, że jeśli G nie jest planarny, ale należy do klasy H–minor–free to wszystko dalej przechodzi; tylko stałe w $O()$ zależą od wykluczonego minora H.

Na ćwiczeniach zobaczymy jeszcze kilka podobnych przykładów.