1 Wykład dwunasty — wstęp do kolorowań, twierdzenie o pięciu barwach

1.1 Ogólne kolorowania wierzchołkowe

1.1.1 Banały

Wpierw powszechnie znane definicje:

Definicja 1.1. Kolorowaniem wierzchołkowym *grafu G na k kolorów nazwiemy taką funkcję $c : V(G) \to \{1, 2, \ldots, k\}$, że dla każdej krawędzi $uv \in E(G)$ mamy $c(u) \neq c(v)$. Innymi słowy, jest to podział zbioru wierzchołków na k zbiorów niezależnych. Najmniejsze k takie, że graf G można pokolorować wierzchołkowo na k kolorów nazwiemy* liczbą chromatyczną *G i oznaczymy $\chi(G)$.*

Przykład: $\chi(K_n) = n$, $\chi(G) \leqslant 2$ wtedy i tylko wtedy gdy G jest dwudzielny.

Zajmijmy się wpierw zgrubnym oszacowaniem liczby chromatycznej. Do tego potrzebujemy dwóch charakterystyk grafu.

Definicja 1.2. *Przez $\omega(G)$ będziemy oznaczać liczbę wierzchołków największego podgrafu G będącego kliką. Przez $\alpha(G)$ będziemy oznaczać liczbę wierzchołków największego zbioru niezależnego w G.*

Oczywiste uwagi: $\omega(G) = \alpha(\overline{G})$, $\omega(\overline{G}) = \alpha(G)$. Również oczywiste:

Lemat 1.3. *$\chi(G) \geqslant \omega(G)$, $\chi(G) \geqslant |V(G)|/\alpha(G)$.*

Dowód. Pierwsza nierówność: jeśli K_k jest podgrafem G, to każdy jego wierzchołek musi być pokolorowany na inny kolor, czyli potrzebujemy co najmniej k kolorów. Druga nierówność: na każdy kolor możemy pokorować maksymalnie $\alpha(G)$ wierzchołków, więc $\chi(G)\alpha(G) \geqslant |V(G)|$. □

Dorzućmy jeszcze uwagę, że grafy rzadkie mają mniejszą liczbę chromatyczną:

Lemat 1.4.

$$\chi(G) \leqslant \frac{1}{2} + \sqrt{2|E(G)| + \frac{1}{4}}.$$

Dowód. Jeśli malujemy na $\chi(G)$ kolory, to możemy założyć, że jest krawędź między każdą parą kolorów — inaczej utożsamiamy te kolory. Czyli $|E(G)| \geqslant \chi(G)(\chi(G)-1)/2$, co jest równoważne powyższej nierówności. □

1.1.2 Twierdzenie Brooksa

Rozważmy następujący algorytm zachłanny:

1. Ponumeruj jakkolwiek wierzchołki grafu, powiedzmy że dostaliśmy kolejność $v_1, v_2, \ldots, v_n$.
2. Dla kolejnego v_i, przydziel mu najmniejszy kolor nie użyty przez $\{v_j : j < i\} \cap N(v_i)$.

On zużyje co najwyżej $\max_{i=1}^{n} |\{v_j : j < i\} \cap N(v_i)|$ kolorów. Jak zminimalizować tę liczbę? Oznaczmy $\mathrm{col}(G) = \max_{H \subset G} \mathrm{mindeg}(H) + 1$. Z jednej strony, jeśli za v_n weźmiemy wierzchołek o minimalnym stopniu w G, za v_{n-1} wierzchołek o minimalnym stopniu w $G \setminus \{v_n\}$, to nasze ograniczenie będzie wynosić co najwyżej $\mathrm{col}(G)$.

Z drugiej strony, zauważmy, że dla każdego podgrafu indukowanego H (wystarczy takie rozważać w maksimum), jeśli v_i jest ostatnim wierzchołkiem H, to $\{v_j : j < i\} \cap N(v_i)$ ma $\deg_H(v_i)$ elementów. Czyli, biorąc opisaną wyżej kolejność v_i, otrzymamy, że ten algorytm zachłanny daje $\mathrm{col}(G)$ kolorowanie. Wnioskiem jest następujący lemat:

Lemat 1.5. *Dla każdego grafu G istnieje podgraf H o $mindeg(H) \geqslant \chi(G) - 1$.*

Co więcej, z powyższego algorytmu od razu widać, że $\chi(G) \leqslant \mathrm{maxdeg}(G) + 1$. Co więcej, jeśli chcemy pokolorować na $\mathrm{maxdeg}(G)+1$ kolorów będziemy brali kolejność v_i od dołu do góry pewnego drzewa rozpinającego, to być może koloru numer $\mathrm{maxdeg}(G) + 1$ będziemy musieli użyć tylko dla korzenia. Widać, że może się tu dać coś zaoszczędzić. Formalizuje to twierdzenie Brooksa, którego dowodzić nie będziemy, bo często jest dowodzone na Matematyce Dyskretnej.

Twierdzenie 1.6 (Brooks 1941)**.** *Jeśli G jest spójny i $\chi(G) = maxdeg(G) + 1$, to G jest nieparzystym cyklem lub kliką.*

Dorzućmy jeszcze twierdzenie Hajnala-Szemerediego do zbioru wiedzy:

Twierdzenie 1.7 (Hajnal-Szemeredi 1970)**.** *Można pomalować G na $maxdeg(G) + 1$ kolorów tak, by liczby wierzchołków pomalowane na różne kolory różniły się o co najwyżej* 1*.*

Tak więc prawie zawsze $\chi(G) \leqslant \mathrm{maxdeg}(G)$ i graf o dużej liczbie chromatycznej ma podgraf o dużym minimalnym stopniu. Czy potrafimy wskazać jakiś jeszcze powód, by liczba chromatyczna była mała lub duża? Wydawać by się mogło, że brak małych cykli (czyli to, że graf lokalnie wygląda jak las) może powodować, że liczba chromatyczna jest mała. Niestety, nie jest to prawda. Też tego nie będziemy dowodzić, bo spora część słuchaczy już ten dowód widziała:

Twierdzenie 1.8 (Erdos 1959)**.** *Dla każdej liczby całkowitej dodatniej k istnieje graf o liczbie chromatycznej co najmniej k i bez cykli krótszych niż k.*

1.2 Trzy słowa o kolorowaniu krawędziowym

Definicja 1.9. Kolorowaniem krawędziowym *grafu G na k kolorów nazwiemy taką funkcję $c : E(G) \to \{1, 2, \ldots, k\}$, że dla każdych dwóch krawędzi $e, f \in E(G)$ mamy $c(e) \neq c(f)$ jeśli e i f mają wspólny koniec. Innymi słowy, jest to podział zbioru krawędzi na k skojarzeń. Najmniejsze k takie, że graf G można pokolorować krawędziowo na k kolorów nazwiemy* indeksem chromatycznym *G i oznaczymy $\chi'(G)$.*

Oczywiście $\chi'(G) \geqslant \mathrm{maxdeg}(G)$. Dla grafów dwudzielnych jest równość. Pokażemy to na ćwiczeniach.

Twierdzenie 1.10 (Konig 1916)**.** *Jeśli G jest dwudzielny, to $\chi'(G) = maxdeg(G)$.*

Twierdzenie Vizinga, które często dowodzi się np. na MD, więc my tu nie będziemy go dowodzić, mówi, że luzu dużo nie ma.

Twierdzenie 1.11 (Vizing 1964)**.** *$\chi'(G) \leqslant maxdeg(G) + 1$.*

Warto zaznaczyć, że rozstrzyganie ile wynosi $\chi'(G)$ jest NP-trudne i jest problemem otwartym, czy da się to zrobić szybciej niż $2^{O(|E(G)|)}$.

1.3 Kolorowania listowe

Jak ktoś zacznie próbować układać algorytm próbujący kolorować graf, czy to wierzchołkowo, czy krawędziowo, szybko dojdzie do następującego rozszerzenia: każdy wierzchołek (krawędź) dodatkowo ma listę dostępnych dla tego wierzchołka kolorów (tutaj kolory to np. po prostu liczby naturalne). Prowadzi to do następującej definicji.

Definicja 1.12. *Graf G jest listowo k-kolorowalny (wierzchołkowo), jeśli dla każdej instancji problemu listowego kolorowania, gdzie każdy wierzchołek dostanie listę dokładnie k kolorów, jest rozwiązanie. Najmniejsze takie k nazwiemy listową liczbą chromatyczną G i oznaczymy $ch(G)$.*

Po angielsku się to czasem nazywa k-choosable i choice number, stąd $\mathrm{ch}(G)$. Oczywiście $\mathrm{ch}(G) \geqslant \chi(G)$.

Analogiczną definicję możemy zrobić dla kolorowań krawędziowych i otrzymać listowy indeks chomatyczni $\mathrm{ch}'(G)$. Łatwo znaleźć przykład, gdy $\mathrm{ch}(G) > \chi(G)$. Otwartym problemem jest czy zawsze $\chi'(G) = \mathrm{ch}'(G)$. Zostało to wykazane dla grafów planarnych:

Twierdzenie 1.13 (Galvin 1995)**.** *Jeśli G jest planarny, to $\chi'(G) = ch'(G)$.*

1.4 Kolorowanie wierzchołkowe grafów planarnych

Trzeba by coś udowodnić na tym wykładzie. Udowodnimy twierdzenie o pięciu barwach dla grafów planarnych: wpierw po prostu, a następnie w wersji listowej.

Twierdzenie 1.14. *Niech G będzie grafem planarnym. Wówczas jest on 5-kolorowalny.*

Dowód. Indukcja po liczbie wierzchołków. Wpierw zauważmy, że każdy graf planarny ma wierzchołek v o stopniu co najwyżej 5. Załóżmy przeciwnie: jeśli w to liczba wierzchołków, s to liczba ścian, k to liczba krawędzi, i każdy wierzchołek ma stopień co najmniej 6, to mamy $6w \leqslant 2k$ i $3s \leqslant 2k$, czyli $w + s \leqslant k$, co jest sprzeczne z wzorem Eulera $w + s = k + 2$.

Usuńmy więc taki wierzchołek v i pomalujmy resztę zgodnie z założeniem indukcyjnym. Jeśli v miał stopień nie większy niż 4, lub jacyś jego sąsiedzi mają równy kolor, to jest koniec — mamy wolny kolor dla v. Jedyny problematyczny przypadek jest, gdy v ma 5 sąsiadów i są pomalowani na wszystkie 5 kolorów.

Ustalmy jakieś zanurzenie G w płaszczyznę i niech, w kolejności, sąsiedzi v to v_1, v_2, v_3, v_4, v_5; v_i pomalowany jest na kolor i. Niech H_{ij} to podgraf $G \setminus \{v\}$ indukowany przez wierzchołki koloru i oraz j. Niech C — spójna składowa H_{13} zawierająca v_1. Jeśli $v_3 \notin C$, to możemy w C zamienić rolami kolory 1 i 3 i otrzymać znów poprawne kolorowanie $G \setminus \{v\}$, które możemy rozszerzyć dając kolor 1 wierzchołkowi v. W przeciwnym wypadku w H_{13} jest ścieżka od v_1 do v_3; ale wtedy nie ma takiej ścieżki w H_{24} pomiędzy v_2 a v_4 i możemy powtórzyć argument. □

To twierdzenie zachodzi też dla listowego kolorowania.

Twierdzenie 1.15 (Thomassen 1994)**.** *Niech G będzie grafem planarnym. Wówczas jest on listowo 5-kolorowalny.*

Dowód. Wpierw zauważmy, że dołożenie krawędzi utrudnia sprawę; możemy więc założyć, że wszystkie ściany G są trójkątne. Twierdzenie będziemy dowodzić indukcyjnie po rozmiarze grafu, ale tezę wzmocnimy do następującej postaci. Mamy graf G i jego ustalone zanurzenie w płaszczyznę takie, że każda ściana ograniczona jest trójkątem, a brzeg ściany zewnętrznej to cykl $C = v_1 v_2 \ldots v_k v_1$. Wierzchołek v_1 został pomalowany już na kolor 1, wierzchołek v_2 na kolor 2. Każdy inny wierzchołek na cyklu ma listę złożoną z co najmniej trzech kolorów, a każdy wierzchołek wewnętrzny z pięciu. To istnieje rozwiązanie tej instancji listowego kolorowania.

Przypadek 1. C ma cięciwę vw. Ona rozbija graf na dwie części G_1 i G_2, G_1 zawiera krawędzi v_1v_2, a G_2 nie. Z założenia indukcyjnego malujemy G_1. Następnie z założenia indukcyjnego malujemy G_2, przy czym wierzchołki z ustalonymi kolorami to v i w.

Przypadek 2. C nie ma cięciwy. Niech $v_1, u_1, u_2, \ldots, u_m, v_{k-1}$ to wewnętrzni sąsiedzi v_k (być może $v_{k-1} = v_2$). Wybieramy dwa kolory c_1, c_2 z listy v_k, różne od 1, i usuwamy je z list u_i — listy będą trzyelementowe. Założeniem indukcyjnym malujemy $G \setminus \{v_k\}$. Następnie v_k malujemy tym kolorem ze zbioru $\{c_1, c_2\}$, który nie został użyty dla v_{k-1}. $\square$

Zacytujmy jeszcze twierdzenie Grotzscha. Zainteresowanych odsyłamy do dość krótkiego i nowego dowodu tego twierdzenia autorstwa Thomassena.

Twierdzenie 1.16 (Grotzsch 1959)**.** *Graf planarny G bez trójkątów jest 3-kolorowalny.*

2 Wykład trzynasty — grafy doskonałe

Na tym wykładzie zajmiemy się grafami doskonałymi (ang. perfect graphs).

Definicja 2.1. *Graf G jest doskonały (ang. perfect) jeśli każdy jego indukowany podgraf H spełnia $\chi(H) = \omega(H)$.*

Oczywiście zawsze $\omega(H) \leqslant \chi(H)$. Czyli grafy doskonałe to takie, że każdy indukowany podgraf ma trywialne dolne oszacowanie na swoją liczbę chromatyczną w postaci kilki-podgrafu.

Definicja ta może wydawać się dziwna, ale jest użyteczna, bo z jednej strony generalizuje wiele klas grafów, a z drugiej strony w grafach doskonałych parę rzeczy da się zrobić łatwiej. Zacznijmy od drugiego końca od zacytowania kilku wyników.

Twierdzenie 2.2. *Istnieje wielomianowy algorytm sprawdzający, czy G jest doskonały. Mając dany graf doskonały G w czasie wielomianowym można policzyć rozmiar największego zbioru niezależnego, kliki czy liczbę chromatyczną G.*

Teraz przykład klasy grafów, które są doskonałe. Przypomnijmy: graf jest cięciwowy (ang. chordal), jeśli nie ma indukowanych cykli większych niż trójkąty. Dowodziliśmy przy okazji teorii minorów, że jest to równoważne posiadaniu dekompozycji drzewowej takiej, że wszystkie worki są klikami.

Lemat 2.3. *Jeśli G jest cięciwowy, to jest doskonały.*

Dowód. Indukcja po rozmiarze G. Podgraf indukowany grafu cięciwowego jest cięciwowy, więc wystarczy pokazać, że $\omega(G) = \chi(G)$, czyli wystarczy, że pokażemy kolorowanie G na $\omega(G)$ kolorów. Ale to możemy zrobić zachłannie po dekompozycji drzewowej $(T, (V_t)_{t \in T})$, gdzie wszystkie worki są klikami. Bierzemy dowolny worek V_t i malujemy go na $|V_t|$ kolorów. Dalej idziemy DFSem po drzewie, i zachłannie domalowujemy kolejne worki. $\square$

Zauważmy, że oczywiście klasa grafów doskonałych jest zamknięta na branie podgrafów. Czyli, podobnie jak w twierdzeniu minorów, można powiedzieć, że istnieje zbiór grafów X taki, że grafy doskonałe to te, co nie mają żadnego grafu z X jako podgrafu indukowanego. Hipoteza Berge z 1963, tzw. Strong Perfect Graph Conjecture, dopiero co udowodniona, mówi, co to za zbiór X jest.

Twierdzenie 2.4 (Chudnovsky, Robertson, Seymour, Thomas 2002)**.** *Graf G jest doskonały wtedy i tylko wtedy gdy nie posiada jako indukowanego podgrafu ani nieparzystego cyklu długości co najmniej 5 ani jego dopełnienia.*

Zauważmy, że zbiór X z tego twierdzenia jest zamknięty na branie dopełnień, czyli klasa grafów doskonałych jest zamknięta na branie dopełnień. To zostało udowodnione przez Lovasza w 1972 roku i celem dzisiejszego wykładu jest pokazanie dwóch dowodów tego faktu.

Twierdzenie 2.5 (Lovasz 1972)**.** *Jeśli G jest doskonały, to $\overline{G}$ też.*

Zanim przejdziemy do dowodu, to śmieszny lemacik.

Lemat 2.6. *Niech $v \in V(G)$ i G jest doskonały. Utwórzmy G' następująco: dodajemy do grafu G wierzchołek v' połączony do $N[v] = N(v) \cup \{v\}$. To G' też jest doskonały.*

Dowód. Indukcja po $|V(G)|$. Z K_1 robimy K_2, czyli początek indukcji OK. Jeśli H jest indukowanym właściwym podgrafem G', to albo jest indukowanym podgrafem G albo powstaje z właściwego indukowanego podgrafu G przez opisaną operację, więc z założenia indukcyjnego H jest doskonały i $\omega(H) = \chi(H)$. Pozostaje więc wykazać, że $\chi(G') = \omega(G')$.

Jeśli $\omega(G') > \omega(G)$ to nie ma problemu, kolorujemy G na $\omega(G)$ kolorów i v' na dodatkowy kolor. W przeciwnym przypadku, $\omega(G') = \omega(G)$ i v nie jest w żadnej klice $K_{\omega(G)}$.

Pomalujmy G na $\omega(G)$ kolorów i niech X będzie zbiorem wierzchołków pomalowanych tak samo jak v. To $\omega(G \setminus (X \setminus \{v\})) < \omega(G)$, po wyrzuciliśmy po wierzchołku z każdej kliki $K_{\omega(G)}$. To malujemy $G \setminus (X \setminus \{v\})$ na $\omega(G) - 1$ kolorów, i malujemy $v' \cup (X \setminus \{v\})$ na pozostały kolor. □

Dowód twierdzenia 2.5. Indukcja po $|V(G)|$. Każdy właściwy indukowany podgraf $\overline{G}$ jest dopełnieniem indukowanego podgrafu G, czyli musimy jedynie wykazać, że $\overline{G}$ można pokolorować na $\omega(\overline{G}) = \alpha(G)$ kolorów.

Oznaczmy przez $\mathcal{K}$ rodzinę wszystkich zbiorów wierzchołków G które indukują kliki, a przez $\mathcal{A}$ rodzinę wszystkich zbiorów niezależnych G maksymalnej mocy $\alpha(G)$.

Załóżmy, że istnieje $K \in \mathcal{K}$ taki, że $K \cap A \neq \emptyset$ dla każdego $A \in \mathcal{A}$. Wówczas w $\overline{G} \setminus K$ z każdej maksymalnej kliki zabraliśmy wierzchołek, czyli $\omega(\overline{G} \setminus K) < \omega(\overline{G})$. Malujemy $\overline{G}$ tak: z założenia indukcyjnego $\overline{G} \setminus K$, i K na jeden dodatkowy kolor.

Jeśli takie K nie istnieje, to dla każdego $K \in \mathcal{K}$ mamy $A_K \in \mathcal{A}$ takie, że $A_K \cap K = \emptyset$. Naszym celem jest dojście do sprzeczności. Jedyną naszą szansą na pokazanie, że $\chi(G)$ jest za duże jest oszacowanie $|G|/\alpha(G)$. To jednak w samym G się tak łatwo nie uda, ale rozdmuchując wierzchołki przy pomocy lematu 2.6 tak, by każde A_K było „rozłączne" już się da.

Niech

$$k(x) = |\{K \in \mathcal{K} : x \in A_K\}|,$$

czyli $k(x)$ to liczba różnych A_K do których x należy. Bierzemy teraz podgraf indukowany G,

$$G_0 = G[\{x : k(x) > 0\}]$$

i rozmnażamy każdy wierzchołek x dokładnie $k(x)$ razy. Innymi słowy, zastępujemy każdy x kliką G_x o $k(x)$ wierzchołkach, $u \in G_x$ zna $v \in G_y$ jeśli $xy \in E(G)$. Otrzymujemy graf G'. Z lematu 2.6 jest on doskonały.

Zauważmy, że maksymalne kliki G' są postaci $\bigcup_{x \in K} V(G_x)$ dla $K \in \mathcal{K}$. Czyli istnieje $K_0 \in \mathcal{K}$ takie, że

$$\begin{aligned}
\omega(G') &= \sum_{x \in K_0} |V(G_x)| = \sum_{x \in K_0} k(x) = \\
&= \sum_{x \in K_0} \sum_{K \in \mathcal{K}} [x \in A_K] = \\
&= \sum_{K \in \mathcal{K}} |A_K \cap K_0| \leqslant \\
&\leqslant \sum_{K \in \mathcal{K} \setminus \{K_0\}} 1 = |\mathcal{K}| - 1.
\end{aligned}$$

Ostatnia nierówność wynika z tego, że A_K to zbiór niezależny, a $G[K_0]$ to klika, więc $|A_K \cap K_0| \leqslant 1$, i jest puste dla $K = K_0$.

Z drugiej strony jednak

$$\begin{aligned}|V(G')| &= \sum_{x\in V(G)} k(x) = \\ &= \sum_{x\in V(G)} \sum_{K\in\mathcal{K}} [x \in A_K] = \\ &= \sum_{K\in\mathcal{K}} |A_K| = \\ &= |\mathcal{K}| \cdot \alpha(G)\end{aligned}$$

Podsumowując i zauważając, że $\alpha(G') \leqslant \alpha(G)$:

$$\chi(G') \geqslant \frac{|G'|}{\alpha(G')} \geqslant \frac{|\mathcal{K}|\alpha(G)}{\alpha(G)} = |\mathcal{K}| > \omega(G').$$

Sprzeczność, bo G' był doskonały. $\square$

Drugi dowód pokazuje trochę więcej, mianowicie:

Twierdzenie 2.7 (Lovasz 1972)**.** *Graf G jest doskonały wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego jego indukowanego podgrafu H zachodzi*

$$|V(H)| \leqslant \alpha(H) \cdot \omega(H).$$

Dowód. To, że to jest konieczne, to widać: mamy $\omega(H)$ kolorów i każdym kolorem pomalujemy maksymalnie $\alpha(H)$ wierzchołków.

W drugą stronę. Robimy indukcję po $|V(G)|$, czyli mamy z założenia indukcyjnego, że każdy właściwy podgraf indukowany G jest doskonały. Załóżmy, że G nie jest, czyli potrzeba $\omega(G)+1$ kolorów (bo po zabraniu jednego wierzchołka $\omega(G)$ starcza). Oznaczmy dla skrótu $\alpha := \alpha(G)$ i $\omega := \omega(G)$.

Obserwacja pierwsza: niech U — dowolny niepusty zbiór niezależny w G. To $\chi(G \setminus U) = \omega(G \setminus U) = \omega(G)$. Pierwsza równość, bo $G \setminus U$ jest doskonały; druga, bo jakby było $\omega(G \setminus U) < \omega(G)$ to by się dało pokolorować G na $\omega(G)$ kolorów: malujemy optymalnie $G \setminus U$ i domalowujemy U na jeden kolor.

Teraz zrobimy dużo zbiorów niezależnych. Bierzemy $A_0 = \{u_1, u_2, \dots, u_\alpha\}$ — jakiś maksymalny zbiór niezależny w G. Teraz każdy $G \setminus u_i$ malujemy optymalnie na ω kolorów i bierzemy klasy kolorów jako zbiory niezależne $A_{(i-1)\omega+1}, A_{(i-1)\omega+2}, \dots, A_{i\omega}$. Mamy w sumie $\alpha\omega+1$ zbiorów niezależnych A_i. Dla każdego zbioru niezależnego, używając obserwacji, mamy klikę $K_i \subset G \setminus A_i$ rozmiaru ω.

Obserwacja druga: jeśli K jest dowolną kliką rozmiaru ω w G to $K \cap A_i = \emptyset$ dla dokładnie jednego $0 \leqslant i \leqslant \alpha\omega$. Po kolej: jeśli $K \cap A_0 = \emptyset$, to $K \cap A_i \neq \emptyset$ dla $i > 0$, bo K musi dotykać każdego koloru w $G \setminus u_i$. Jeśli zaś $K \cap A_0 \neq \emptyset$, to jest jednoelementowe, $K \cap A_0 = \{u_i\}$. Dla $j \neq i$, $j > 0$, mamy jak poprzednio $K \cap A_{j'} \neq \emptyset$ dla $(j-1)\omega < j' \leqslant j\omega$, bo K dotyka każdego koloru, gdy malujemy $G \setminus u_j$. Gdy malujemy $G \setminus u_i$, K omija dokładnie jeden kolor i to jest to $A_{i'}$ dla którego $K \cap A_{i'} = \emptyset$.

No to już prawie koniec. Weźmy macierz A rozmiaru $(\alpha\omega+1) \times |V(G)|$, w każdej kolumnie wpiszmy wektor charakterystyczny A_i. Weźmy macierz B rozmiaru $|V(G)| \times (\alpha\omega+1)$ i wpiszmy w każdym wierszu wektor charakterystyczny K_i. Co wyjdzie z pomnożenia AB?

Na przekątnej zera, bo $A_i \cap K_i = \emptyset$ z konstrukcji. No ale z obserwacji drugiej w takim razie $|K_i \cap A_j| = 1$ dla $i \neq j$, czyli poza przekątną wyjdą jedynki. Czyli to co wyjdzie będzie nieosobliwe, czyli będzie rzędu $\alpha\omega+1$. Czyli w szczególności $|V(G)| \geqslant \alpha\omega+1$, sprzeczność. $\square$

3 Wykład czternasty — twierdzenie o czterech barwach

Dowodziliśmy uprzednio, że każdy graf planarny daje się pokolorować (wierzchołkowo) na pięć kolorów. Zapewne wiedzą Państwo — bo to jeden z bardziej znanych faktów kultury matematycznej — że problem czterech barw (czyli czy każdy graf planarny bez pętli da się pokolorować czterema kolorami) był bardzo długo otwarty, a następnie został rozwiązany (przez Appela i Hakena) przy użyciu technik komputerowych. Na dzisiejszym wykładzie postaramy się zrozumieć, jak tego twierdzenia się dowodzi. Ciekawym — przynajmniej z mojego punktu widzenia — pytaniem jest to, jak problem — w swojej istocie nieskończony, pytający o własność *każdego* grafu planarnego — zredukować do sprawdzenia skończonej, choćby i dużej, liczby przypadków. Oczywiście ręcznego sprawdzenia wszystkich przypadków nie wykonamy.

Jako, że będziemy prowadzić rozumowania indukcyjne redukujące graf, wypada stwierdzić, jaką klasę grafów dopuszczamy. Otóż będziemy rozważać multigrafy bez pętli — tj. dopuszczamy wielokrotne krawędzie. Zaczynamy zawsze od grafu prostego, natomiast podczas różnych wykonywanych przekształceń może się zdarzyć, że dostawimy jakieś wielokrotne krawędzie. Oczywiście wielokrotne krawędzie nie wpływają na kolorowalność, natomiast mogą wpływać na kształt rysunku grafu na płaszczyźnie. W szczególności, co może być kontrintuicyjne, nie domagamy się, by równoległe krawędzie były rysowane obok siebie (czyli ograniczały ścianę o dwóch bokach). Za każdym razem mówiąc „graf planarny" będziemy mieli na myśli graf wraz z ustalonym rysunkiem, który dowodzi planarności (co o tyle istotne, że graf planarny często można narysować na więcej niż jeden zauważalnie różny sposób wybierając kolejność sąsiadów danego wierzchołka).

Będziemy rozważali, dość standardowo, *minimalny kontrprzykład*, tj. taki graf planarny T, że $\chi(T) > 4$ (konkretnie $\chi(T) = 5$, w świetle twierdzenia o pięciu barwach), zaś $\chi(G) = 4$ dla każdego G spełniającego $|V(G)| < |V(T)|$.

Definicja 3.1. *Graf planarny T jest ztriangulowany, jeśli każda ściana jest trójkątem. Jest prawie ztriangulowany, jeśli trójkątem jest każda ściana prócz zewnętrza.*

Łatwo zauważyć, że jeśli mamy dowolny graf T i wierzchołek v stopnia 4, oraz pokolorowanie $T[V(T) \setminus \{v\}]$, to możemy pokolorować też T (argument przez łańcuchy Kempego identyczny jak w twierdzeniu o pięciu barwach), skąd w minimalnym kontrprzykładzie nie ma wierzchołków stopnia 4 i mniej. Co więcej, możemy założyć, że T jest ztriangulowany (bo dodawanie krawędzi tylko utrudnia problem).

Udowodnimy za chwilę, że można założyć, że jeśli w minimalnym kontrprzykładzie istnieje cykl rozspajający długości nie większej niż 5 (czyli taki cykl, że po każdej jego stronie znajduje się przynajmniej jeden wierzchołek), to po jednej jego stronie leży dokładnie jeden wierzchołek, a długość cyklu to dokładnie pięć.

Będziemy starać się kolorować graf kawałek po kawałku. W wyniku takiej strategii w danej chwili mamy graf, który jest prawie striangulowany, i do tego chcemy pamiętać, ile wierzchołków spoza zaznaczonej części widzi dany wierzchołek. Opiszemy to pojęciem *konfiguracji*.

Definicja 3.2. *Konfiguracją nazwiemy prawie ztriangulowany graf planarny K oraz funkcję $\gamma : V(G) \to \mathbb{Z}_+$, spełniającą:*

- *Jeśli v nie jest na brzegu zewnętrza, to $\gamma(v) = \deg_K(v)$, w przeciwnym razie $\gamma(v) > \deg_K(v)$, i w obu przypadkach $\gamma(v) \geqslant 5$;*
- *Jeśli v rozspaja K, to rozspaja na co najwyżej dwie części, i wtedy $\gamma(v) = \deg_K(v) + 2$;*
- *$\sum \gamma(v) - \deg_K(v) - 1 \geqslant 2$, gdzie suma przebiega po wszystkich wierzchołkach v sąsiadujących z zewnętrzem, a nie rozspajających K.*

Ta definicja w istocie mówi, że patrzymy, ile wierzchołków dany wierzchołek widzi na zewnątrz, te wierzchołki, które rozspajają graf, widzą po dwa dodatkowe wierzchołki, zaś te, które nie rozspajają, zawsze coś widzą (musi tak być, jeśli założymy, że K jest indukowane z jakiejś triangulacji), i przynajmniej dwa nadwyżkowe wierzchołki są widziane.

Definicja 3.3. *Konfiguracja* K pojawia się *w ztriangulowanym grafie* T*, jeśli* K *jest indukowanym podgrafem* T, $\deg_T(v) = \gamma(v)$ *oraz każdy region* K *jest regionem* T *(tj. nie ma zaniedbanych wierzchołków „w środku* K*”).*

Idea — w makroskali — jest taka, żeby pokazać pewien zbiór konfiguracji, z których z jednej strony każda musi wystąpić w każdej triangulacji (przy założeniach 5/6–spójności, jak wyżej), a z drugiej każda jest „redukowalna”, czyli możemy wyjąć ją z grafu, pokolorować to, co zostanie, i potem przedłużyć do kolorowania całego grafu — a zatem taka konfiguracja nie może być częścią minimalnego kontrprzykładu. Prototypem — można tak myśleć — konfiguracji redukowalnej jest wierzchołek stopnia 4.

Będziemy chcieli uogólnić koncept łańcuchów Kempego. Tam idea była taka, że braliśmy dwa naprzeciwległe kolory, łączyliśmy łańcuchem, i mówiliśmy, że te łańcuchy się nie przecinają. Tu będziemy robić podobne, choć nieco bardziej złożone rzeczy. Żeby ułatwić sobie życie notacyjnie (żeby nie musieć wyróżniać par kolorów, i mówić “to jest jedna para, a to druga para”), zróbmy tak:

- Bierzemy klikę $K4$, etykietujemy wierzchołki kolorami.
- Kolorujemy krawędzie liczbami $1, 2, 3$, tak by w każdym wierzchołku spotykały się trzy liczby
- Jeśli mamy kolorowanie triangulacji T na 4 barwy, to możemy w zamian pokolorować krawędzie liczbami $1, 2, 3$ (w zależności od pary kolorów końców), każdy trójkąt będzie miał krawędzie trzech różnych kolorów.
- Analogicznie, jeśli mamy kolorowanie krawędzi triangulacji, w której każdy trójkąt ma trzy różne kolory, to możemy z tego zrobić kolorowanie wierzchołkowe (pokolorować jeden wierzchołek dowolnie, potem postępować zgodnie ze wskazówkami z krawędzi, prosta indukcja pokazuje, że to wyjdzie zgodne).

Teraz zamiast myśleć o 4–kolorowaniach wierzchołkowych będziemy myśleć o 3–kolorowaniach krawędziowych (można o tym myśleć tak, że to uniezależnia nas od wyboru koloru startowego).

To, co tak naprawdę będziemy robić, to nie wywalać wierzchołki z konfiguracji, tylko ściągać krawędzie (konkretnie to zazwyczaj jakiś las rozpinający).

3.1 Redukowanie konfiguracji

Rozważmy cykl R. Będziemy w R wyróżniać pary krawędzi, i nadawać im znaki. Generalnie: na niewyróżnionych parach krawędzi będziemy oczekiwać koloru 1, zaś na wyróżnionych — kolorów 2 lub 3, co więcej, na parze krawędzi będziemy oczekiwać takich samych kolorów, jeśli ta para ma znak $+$, a różnych, jeśli ma znak $-$.

Definicja 3.4. Oznakowanym sparowaniem *nazywamy zbiór rozłącznych par ze znakiami, dla którego żadne dwie pary krawędzi się nie przeplatają (tj. wyjęcie jednej pary rozspaja cykl tak, że pozostała para jest w jednej składowej). Mówimy, że trzy–kolorowanie* k *cyklu* R a–pasuje *do oznakowanego sparowania* M*, jeśli* M *zawiera dokładnie te krawędzie, ktore nie mają koloru* a*, zaś krawędzie w jednej parze mają ten sam kolor wtedy i tylko wtedy, gdy ta para ma znak*

$+$. *Mówimy, że dla koloru $a \in \{1, 2, 3\}$ zbiór $\mathcal{C}$ trzy–kolorowań R jest spójny, jeśli dla każdego kolorowania z $\mathcal{C}$ i każdego koloru a istnieje takie oznakowane sparowanie M, że to kolorowanie a–pasuje do M i $\mathcal{C}$ zawiera* wszystkie *kolorowania a–pasujące do M.*

Żeby zrozumieć o co chodzi, podamy trywialny przykład i kluczowy przykład.

Trywialny przykład: pusty i pełny zbiór kolorowań są spójne. Ciut mniej trywialny — zbiór legalnych (tj. trójbarwnych) trzy–kolorowań trójkąta jest spójny. Wystarczy dla każdego koloru brać jednoelementowe sparowanie krawędzi pozostałych kolorów, ze znakim minus.

A teraz pora na ten kluczowy przykład. Weźmy dowolny graf prawie ztriangulowany T. Rozważmy marszrutę wyznaczającą brzeg zewnętrza w naturalny sposób (na niej mogą się powtarzać wierzchołki, bo T nie musi być dwuspójny, a nawet krawędzie, jeśli T ma mosty), i rozważmy cykl R, który naturalnie nakrywa tę marszrutę (tj. mamy przekształcenie, nie koniecznie różnowartościowe, z R na tę marszrutę). Jeśli mamy trzy–kolorowanie T, to możemy z niego zrobić w sposób naturalny trzy–kolorowanie R (tj. każda krawędź R dostaje kolor, który ma jej obraz w T). To kolorowanie R nazywamy podniesieniem kolorowania z T.

Lemat 3.5. *Niech T będzie prawie–triangulacją, zaś niech R będzie cyklem nakrywającym brzeg T przez funkcję ϕ. Wtedy zbiór wszystkich podniesień legalnych kolorowań T jest spójny.*

Dowód. Ustalmy kolor (bez straty ogólności powiedzmy, że jest to 1). Weźmy kolorowanie k grafu T i jego podniesienie K do R. Mamy znaleźć sparowanie krawędzi R, do którego pasuje K, i takie, że wszystkie kolorowania pasujące do K są podniesieniami jakiegoś legalnego kolorowania T.

Teraz spojrzymy na ekwiwalent łańcucha — żebro. Weźmy krawędź na brzegu T, koloru innego niż 1. Jeśli z obydwu stron sąsiaduje z zewnętrzem, to jest ona żebrem (taka krawędź, która z obu stron sąsiaduje z zewnętrzem, będzie występowała dwukrotnie w marszrucie R, i to żebro odpowiada parze łączącej te dwa wystąpienia, ze znakiem $+$). W przeciwnym razie — jest też na brzegu jakiegoś trójkąta. Ten trójkąt ma jeszcze jedną krawędź o kolorze innym niż 1, to druga krawędź żebra. I teraz przedłużamy dalej — ta krawędź albo już dobiła do zewnętrza, albo po drugiej stronie znowu ma trójkąt, z ktorego bierzemy krawędź o kolorze innym niż 1. I tak dalej, aż dojdziemy do brzegu.

Takie żebra są rozłączne (tj. nie współdzielą ani krawędzi, ani trójkątów), mają naprzemiennie krawędzie kolorowane 2 i 3. Z każdym żebrem kojarzymy parę (jego początkową i końcową krawędź) i znak zależny od parzystości długości żebra.

Z jednej strony, nasze kolorowanie pasuje do tak uzyskanego sparowania. Faktycznie — każda krawędź jest jakoś sparowana, więc te niesparowane mają kolor 1, oraz znaki na parach są poprawnie dobrane. Z drugiej — jeśli weźmiemy dowolne kolorowanie R zgodne z uzyskanym sparowaniem, to możemy je otrzymać jako podniesienie kolorowania na T, po prostu poprzez zamianę kolorów 2 i 3 na odpowiednich żebrach. Jako, że żebro zawiera wszystkie trójkąty, które są incydentne z zamienianymi krawędziami, i zamienia wzajemnie krawędzie 2 i 3 takim trójkątom, to warunek kolorowania będzie ciągle spełniony. □

Teraz możemy udowodnić zapowiadany fakt, że w minimalnym kontrprzykładzie nie może występować krótki cykl (jako przykład zastosowania twierdzenia powyżej):

Stwierdzenie 3.6. *Niech T będzie minimalnym kontrprzykładem, zaś R — cyklem w T, po wyjęciu którego zarówno we wnętrzu, jak i w zewnętrzu cyklu zostają wierzchołki. Wtedy $|R| \geqslant 6$, albo też $|R| = 5$ i po jednej ze stron R leży tylko jeden wierzchołek.*

Dowód. . Weźmy dowolny krótki cykl.

Jeśli jest on dwuwierzchołkowy, to prosto — wyjęcie jego dwóch końców rozspaja T na ileś kawałków $X_1, X_2, \ldots, X_k$. Ustalamy jedną z dwóch krawędzi cyklu — e. Bierzemy każdy taki kawałek wraz z tymi dwoma końcami,wraz z krawędzią e, ale bez tej drugiej (powiedzmy f). Zauważmy, że to, co dostaliśmy, to triangulacja (bo wyjmując f w ścianie zawierającej f zastąpiliśmy f przez e), i jest mniejsza od T, a więc ma trzykolorowanie krawędzi. Bierzemy takie trzykolorowanie, w którym e ma kolor 1. Zlepienie wszystkich tych trzykolorowań, w którym e i f będą miały kolor 1, będzie dobrym trzykolorowaniem T.

Jeśli jest dłuższy, to możemy założyć, że jest to cykl indukowany (jeśli nie, to ma cięciwę, i przynajmniej jeden z dwóch krótszych cykli zadanych przez tę cięciwę też jest rozspajający). Przypadki długości trzy i cztery zostawimy na ćwiczenia, pokażemy, jak zrobić przypadek cyklu długości 5.

Cykl jest indukowany, więc reszta T po wyjęciu tego cyklu rozpada się na dwie części. Niech H_1 będzie jedną z tych części, wraz z cyklem R. Rozważmy zbiór $\mathcal{C}$ wszystkich kolorowań R, które są obcięciami dobrych trzykolorowań H_1. Na mocy twierdzenia wyżej jest to zbiór spójny. Oczywiście jest też zamknięty na permutowanie kolorów.

Rozważmy H_1 po dostawieniu wewnątrz R wierzchołka v i połączeniu go ze wszystkimi wierzchołkami R. Jako, że wewnątrz R był więcej niż 1 wierzchołek, to to, co otrzymaliśmy jest triangulacją mniejszą niż T, a zatem ma trzykolorowanie. Z v sąsiadują krawędzie trzech kolorów (bo dwie takie same nie mogą sąsiadować, więc dwa kolory nie wystarczą), jednego z nich jest jeden, a pozostałych po dwa (bo żadnego nie może być trzy — pewne dwa by sąsiadowały), skąd kolejne krawędzie wychodzące z v mają kolory $ababc$, zaś wobec tego kolejne krawędzie cyklu — $cccab$.

Oznaczmy wierzchołki R przez kolejno $v_1, v_2, \ldots, v_5, v_6 = v_1$, niech e_i łączy v_i z v_{i+1}. Niech A_{ij} oznacza kolorowanie, w którym krawędź i ma kolor 1, krawędź j ma kolor 2, zaś pozostałe mają kolor 3. Patrzymy na $\mathcal{C}$. Z rozumowania powyżej, w $\mathcal{C}$ znajduje się jakieś kolorowanie $A_{i,i+1}$.

Jeśli znajdują się w $\mathcal{C}$ wszystkie kolorowania $A_{i,i+1}$, to jest prosto — bierzemy H_2, analogicznie dostawiamy wierzchołek w środku R, kolorujemy z założenia o minimalności, i dostajemy jak wyżej któreś z kolorowań $A_{i,i+1}$ — i teraz sklejamy dwa kolorowania $A_{i,i+1}$.

Jeśli w $\mathcal{C}$ nie ma wszystkich kolorowań $A_{i,i+1}$, to powiedzmy, że jest A_{12}, a nie ma A_{23}. No to patrzymy na A_{12}. Skoro $\mathcal{C}$ jest spójny, to znajdźmy takie oznakowane sparowanie M, że A_{12} 2-pasuje do M (przypomnijmy, że e_2 ma kolor 2). Krawędź e_1 jest z czymś sparowana — albo z e_5, albo z e_3 (gdyby była sparowana z e_4, to e_5 byłoby sparowane z e_3, i sprzeczność, bo żebra by się przecinały). Gdyby była sparowana z e_3, to zamieniając kolory na żebrze dostalibyśmy kolorowanie A_{23}, sprzeczność. Zatem możemy zamienić kolory na żebrze 15, i wobec tego A_{25} należy do $\mathcal{C}$.

Teraz, niestety, znowu są dwa przypadki — albo A_{15} należy do $\mathcal{C}$, albo nie. Jeśli należy, to OK — bierzemy H_2, kasujemy krawędź v_4v_5, utożsamiamy v_3 z v_5, dorysowujemy krawędź v_1v_4 i patrzymy na otrzymaną triangulację. To, co może budzić niepokój, to utożsamienie v_3 z v_5 — ale skoro nie były połączone krawędzią, to nie były wierzchołkami jednej ściany, więc operacja, którą przeprowadziliśmy, daje dobrą triangulację, oczywiście mniejszą niż T, a więc trzykolorowalną krawędziowo. Kolorowanie tej triangulacji da nam sytuację, w której krawędź $v_4v_3 = v_4v_5$ jest jakiegoś koloru, i tego samego koloru jest jedna z v_1v_2 i v_2v_3, zaś v_1v_5 i brakująca krawędź z v_1v_2 i v_2v_3 są dwóch pozostałych kolorów — a zatem otrzymujemy kolorowanie A_{51} lub A_{52}, z których oba należą do $\mathcal{C}$, a zatem możemy znowu skleić po wspólnym kolorowaniu.

Ostatni przypadek to ten, w którym do $\mathcal{C}$ należą A_{12} i A_{25}, zaś A_{23} i A_{15} — wręcz przeciwnie. Jak już widzieliśmy, szukając sparowania, do którego A_{12} 2–pasuje otrzymaliśmy żebro 15. Teraz szukamy sparowania, do którego A_{12} 1–pasuje. Nie ma w nim żebra 25 (bo wtedy otrzymalibyśmy kolorowanie A_{15}), a zatem jest 23 — czyli mamy kolorowanie A_{13}. Podobnie patrząc na A_{25} i szukając 2–pasującego sparowania widzimy, że nie może istnieć żebro 21, a zatem istnieje 23 — czyli mamy w $\mathcal{C}$ kolorowanie A_{35}.

Dodajemy do H_2 krawędzie v_2v_4 i v_2v_5 i kolorujemy. Dwie dodane krawędzie są dwóch różnych kolorów — zatem ten trzeci kolor występuje na krawędzi v_4v_5 oraz w każdym z trójkątów $v_2v_1v_5$ i $v_2v_3v_4$, zaś na pozostałych krawędziach występują dwa pozostałe kolory — czyli otrzymujemy jedno z czterech kolorowań występujących w $\mathcal{C}$. Zatem znowu możemy skleić otrzymane dwa kolorowania, CBDO. □

Teraz wracamy do ogólniejszej teorii redukowalności. Zauważmy, że jeśli mamy dwa spójne zbiory kolorowań, to ich suma też jest spójna. Wobec tego jeżeli mamy dowolny zbiór kolorowań, to istnieje jednoznacznie wyznaczony maksymalny spójny zbiór kolorowań w nim zawarty. Co więcej, ten zbiór jest obliczalny algorytmicznie — w czasie, oczywiście, wykładniczym od $|R|$, ale — jak się okaże — wielomianowym od $|T|$.

Naszym celem jest udowodnić, że jakaś konfiguracja nie może być zawarta w minimalnym kontrprzykładzie. Rozważmy zatem jakąś konfigurację K. Przez jej *wolne uzupełnienie* S rozumiemy takie dodanie cyklu R otaczającego K, że każdy wierzchołek z brzegu K sąsiaduje z $\gamma(v) - \deg_K(v)$ wierzchołkami z R, i S jest prawie triangulacją, w której wierzchołki z K nie sąsiadują z zewnętrzem, K jest podgrafem indukowanym S, i regiony K są regionami S (poza zewnętrzem, w którym zawarte są wszytkie „dodatkowe” regiony S).

Wolne uzupełnienie to w pewnym sensie „lokalnie największe możliwe” uzupełnienie K, inne uzupełnienia będą powstawały przez utożsamianie pewnych (nie sąsiednich) wierzchołków z R.

Rozważmy zbiór $\mathcal{C}^\star$ wszystkich trzy–kolorowań R, oraz zbiór $\mathcal{C}$ wszystkich obcięć kolorowań S do R. Jak wiemy, $\mathcal{C}$ jest spójny. Chcemy pokazać, że jeśli $\mathcal{C}^\star \setminus \mathcal{C}$ nie zawiera żadnego niepustego zbioru spójnego, to minimalny kontrprzykład nie może zawierać konfiguracji T.

Definicja 3.7. *Jeśli $\mathcal{C}^\star \setminus \mathcal{C}$, wedle definicji wyżej, nie zawiera żadnego niepustego zbioru spójnego, to konfigurację K nazwiemy* redukowalną

Lemat 3.8. *Jeśli mamy dowolną triangulację T, oraz dowolną występującą w niej konfigurację K, zaś S jest wolnym uzupełnieniem K, to da się przekształcić S na T tak, że K przechodzi na K, oraz zachowana jest relacja incydencji.*

Nie będziemy dowodzić tego lematu, trudno nie zgodzić się z autorami pracy, że widać jak to zrobić, ale sympatyczne to to nie będzie. Drugim podobnym (tj. czytelnym, ale żmudnym) wynikiem jest:

Lemat 3.9. *Niech K będzie konfiguracją w T, S jej wolnym uzupełnieniem z cyklem otaczającym R, zaś ϕ — mapą wkładającą S w T. Niech H będzie prawie triangulacją otrzymaną przez wyrzucenie wierzchołków z K i uznanie stworzonego tak regionu za nieskończony. Wtedy H jest (faktycznie) prawie striangulowane, zaś ϕ stanowi nakrycie brzegu zewnętrza w H przez R.*

Twierdzenie 3.10. *Jeśli konfiguracja K występuje w minimalnym kontrprzykładzie, to nie jest redukowalna.*

Dowód. Rozważmy konfigurację K. Rozważmy jej wolne uzupełnienie S przez cykl R, a następnie nakrycie sąsiedztwa K w T przez R jak wyżej. Niech H będzie prawie triangulacją jak wyżej (tj. powstałą przez wycięcie K). Wtedy zarówno H, jak i samo K, jest trzy–kolorowalne. W obydwu bowiem tych przypadkach można odpowiednią prawie triangulację uzupełnić do triangulacji dodając krawędzie, i następnie skorzystać z założenia o minimalności K.

To teraz rozważmy zbiór wszystkich podniesień do R kolorowań H. On jest, jak wiemy, spójny. Z drugiej strony, jeśli rozważymy zbiór wszystkich podniesień do R kolorowań $\phi(S)$, to też dostaniemy zbiór spójny. Te dwa zbiory spójne muszą być rozłączne — bo gdyby istniał element wspólny, to moglibyśmy go przenieść przez ϕ. Ale z założenia o redukowalności K, po wywaleniu zbioru podniesień kolorowań S do R nie zostaje żaden rozłączny zbiór spójny, sprzeczność. Zatem faktycznie mamy metodę dowodzenia, że pewne konfiguracje nie mogą się pojawić w minimalnym kontrprzykładzie. □

Teraz autorzy pracy wzięli i wypisali zbiór 633 konfiguracji, które są redukowalne albo w powyższym sensie (nie istnieje niepusty, spójny zbiór kolorowań cyklu otaczającego, rozłączny z obcięciami kolorowań wolnego uzupełnienia konfiguracji), albo w ciut bardziej skomplikowanym sensie, którego tu nie prześledzimy.

Sprawdzanie redukowalności jest, niestety, mało wykonalne ręcznie (co spróbujemy przeanalizować nieco na ćwiczeniach).

Teraz uwaga skąd to się wzięło — istnieje hipoteza Heescha, która charakteryzuje, które konfiguracje mają szansę być redukowalne. Wobec tego autorzy pracy generowali (losowo) różne układy (konkretnie — brali wierzchołek i zgadywali jego otoczenie rzędu dwa, czyli sąsiadów i sąsiadów sąsiadów), patrzyli na występujące tam konfiguracje, i sprawdzali, które spośród tych, które spełniają hipotezę Heescha uda im się zredukować (tj. zapuszczali algorytmy testowania redukowalności).

Autorzy pracy twierdzą, że sprawdzenie redukowalności wszystkich 633 konfiguracji zajmuje łącznie około paru godzin pracy komputera.

3.2 Nieuniknioność konfiguracji

Mamy zatem listę 633 konfiguracji, i chcemy pokazać, że w każdym minimalnym kontrprzykładzie musi wystąpić któraś z nich. Do tego użyjemy dischargingu.

Robimy tak — ładujemy każdy wierzchołek ładunkiem $10(6-\deg(v))$. Zauważmy, że skoro mówimy o triangulacji T, to $3S = 2K$, czyli wzór Eulera przyjmuje postać $W = K/3 + 2$. Takie ładunki startowe są równoważne naładowaniu każdego wierzchołka ładunkiem 60, a każdej krawędzi ładunkiem -20, i potem rozładowaniu krawędzi na przyległe wierzchołki. Zatem łączny startowy ładunek to 120 (co otrzymujemy mnożąc wzór Eulera stronami przez 60).

Teraz definiujemy reguły rozładowywania wierzchołków. Zdefiniujemy 31 reguł. Każda z nich będzie miała postać pewnego podgrafu wraz z zadanymi stopniami wszystkich wierzchołków. Dana reguła wymusza przepływ ładunku ze źródła do ujścia raz na każde wystąpienie w grafie.

Jak zazwyczaj, stosujemy discharging raz, dla wszystkich reguł na raz, i następnie szukamy wierzchołka o dodatnim ładunku. Należy udowodnić, że jeśli żadna z wymienionych 633 konfiguracji nie występuje w grafie, to wszystkie wierzchołki musiałyby mieć stopień ujemny.

Tu dowód jest również niesterowny (tj. nieprzeprowadzalny ręcznie). Szkicowo — przebiega on tak. Weźmy dowolny wierzchołek, i załóżmy, że po rozładowaniu ma on ostro dodatni ładunek. Rozbijamy na przypadki w zależności od stopnia tego wierzchołka.

Wpierw dowodzimy, że przepływ między dwoma wierzchołkami wynosi (jeśli nie ma zabronionych konfiguracji) co najwyżej pięć. Tego dowodzimy w zależności od stopnia źródła (dlatego, że we wszystkich regułach stopień źródła jest ograniczony przez 8). Przykładowo dla źródła o stopniu 5, przepływ do t może być powodowany przez pierwszą regułę (w sumie 2 przepływu, zawsze), przez regułę drugą (maksymalnie dwa przepływu dla ustawienia wierzchołka z dwóch stron) i przez regułę trzecią (też maksymalnie dwa). Żeby jednak i druga, i trzecia reguła była stosowalna dwa razy, to obydwaj wspólni sąsiedzi źródła i ujścia muszą być stopnia 5 (reguła 2), oraz obydwaj unikalni sąsiedzi źródła muszą być stopnia 5 (reguła 3) — przypomnijmy, że źródło ma stopień pięć, czyli oprócz ujścia ma czterech sąsiadów. Wobec tego jednak trzech kolejnych sąsiadów źródła wraz ze źródłem tworzy konfigurację pierwszą.

Analogiczne (choć oczywiście z większą liczbą przypadków) dowody prowadzi się dla źródeł stopnia 6, 7 i 8 (najbardziej złożony jest stopień 7, który opisywany jest przez największą liczbę reguł). Wobec tego, w szczególności, wiemy, że wierzchołki stopnia 12 lub większego będą miały po rozładowaniu niedodatni ładunek — bo startowo miały ładunek $60-10d$, a zyskały najwyżej $5d$ przy rozładowywaniu.

Teraz jeszcze zauważmy, że wszystkie reguły sięgają najdalej do drugiego sąsiedztwa zarówno źródła, jak i ujścia. Drugie sąsiedztwo wierzchołka ma przyjemny kształt — składa się z wierzchołka oraz dwóch rozłącznych cykli dookoła niego. Krawędzie, oprócz krawędzi cyklowych, to krawędzie od środka do pierwszego cyklu i od pierwszego cyklu do drugiego, przy czym najbardziej lewa krawędź danego wierzchołka z pierwszego cyklu idzie do tego samego wierzchołka, co najbardziej prawa krawędź jego lewego sąsiada. Dowolne inne krawędzie w grafie wyprodukowałyby nam cykl rozspajający o mniej niż pięciu wierzchołkach.

Uzasadnijmy sobie teraz, że problem, który nam pozostał jest skończony (autorzy twierdzą, że jest sprawdzalny na domowym komputerze). Otóż mamy wierzchołek stopnia od 5 do 11. Patrzymy na jego otoczenie. Każdy wierzchołek z tego otoczenia ma stopień od 5 do 8 albo 9+. Zauważmy, że stopień wierzchołka 9+ nie gra roli — taki wierzchołek na pewno nie jest źródłem, spełnia tę samą rolę we wszystkich regułach (gdzie nie pytamy o stopień wierzchołków stopnia większego niż 8), oraz nie wpływa na kształ sąsiedztwa innych wierzchołków (co prawda występuje w części wykluczonych konfiguracji, ale możemy założyć, że każdy wierzchołek stopnia 9+ ma na tyle wysoki stopień, by nie dotyczyły go wykluczenia z powodu niedozwolonych konfiguracji — te konfiguracje były potrzebne do dowodu lematu o sumie przepływów). I dalej mamy drugi pierścień sąsiedztwa, w którym podobnie możemy ustalić wszystkie stopnie, przy czym chwila uważnego przyjrzenia się regułom prowadzi nas do wniosku, że w większości przypadków stopnie unikalnych sąsiadów nie będą nas interesować. Następnie dla każdego takiego rysunku wycinamy go od razu, jeśli zawiera którąś z zabronionych konfiguracji, a jeśli nie, to liczymy przepływ do ujścia, i sprawdzamy, że końcowy ładunek będzie niedodatni. Ta część powinna na sprawnym komputerze policzyć się szybciej niż w godzinę.