Każdy dział ma tematy podzielone na dwie części: podstawowe i zaawansowane. Na egzaminie trzeba będzie umieć wszystkie działy w wersji podstawowej i jeden, wybrany, w wersji podstawowej i zaawansowanej. Jeśli nie ma wyraźnie powiedzianego, że trzeba umieć dowód czegoś, to nie trzeba.

1 Skojarzenia

1.1 Wersja podstawowa

1. Definicja skojarzenia, skojarzenia doskonałego.
2. Twierdzenie Halla z dowodem. Wzór Ore z dowodem. Zastosowania twierdzenia Halla, w tym zadania 25–30.
3. Twierdzenie Koniga z dowodem.
4. Twierdzenie Tutte i wzór Tutte–Berge. Proste zastosowanie twierdzenia Tutte, np. dowód, że w grafie kubicznym bez mostów jest doskonałe skojarzenie.
5. Rozkład Gallai–Edmondsa z prostym zastosowaniem, np. zadanie 24.
6. Definicja Perfect Matching Polytope i wielokomórki skojarzeń mocy $|V_1|$ w grafie dwudzielnym $G = (V_1, V_2, E)$. Twierdzenie Edmondsa o charakteryzacji PMP i tej wielokomórki. Dowód jednej z (czterech) implikacji. Proste zastosowanie (np. graf kubiczny bez mostów jest pokryty przez skojarzenia).
7. Definicja ciasnego cięcia i rozkładu na cegły i klamry. Przykład. Charakteryzacja cegieł i klamr.
8. Twierdzenie ELP o wymiarze PMP. Prosty wniosek z niego, np. o liczbie doskonałych skojarzeń w cegle.
9. $\mathcal{S}$–ścieżki. Podział Madera. Twierdzenie Gallai. Przykład.

1.2 Wersja zaawansowana

1. Dowód twierdzenia Tutte i wzoru Tutte–Berge.
2. Dowód rozkladu Gallai–Edmonds.
3. Analiza grafów krytycznych (zadania 22 i 23).
4. Warunek Halla ze stałymi i Crown Decomposition (zadania 18 i 19).
5. Dowód twierdzenia Edmondsa o charakteryzacji PMP i wielokomórki skojarzeń mocy $|V_1|$ w grafie dwudzielnym $G = (V_1, V_2, E)$.
6. Dowód charakteryzacji klamr.
7. Szacowanie liczby doskonałych skojarzeń w grafach kubicznych bez mostów przez $n/4+2$, z dowodem.
8. Dowód twierdzenia Gallai o $\mathcal{S}$–ścieżkach (bez dowodu istnienia blokera). Sformułowanie twierdzenia Madera.

2 Ekspandery

2.1 Wersja podstawowa

1. Definicja ekspansji wierzchołkowej i krawędziowej oraz względnej i bezwzględnej przerwy spektralnej, podstawowe własności macierzy grafu (symetria, wartości własne istnieją, wektory własne ortogonalne, wartości własne co do modułu nie większe niż d).

2. Równoważność (dla grafów d–regularnych) $\Delta(G) = 0$, $h_E(G) = 0$ i G niespójny lub dwudzielny z dowodem.

3. Równoważność (dla grafów d–regularnych) $\Delta'(G) = 0$, $h_V(G) = 0$ i G niespójny z dowodem.

4. Trywialny algorytm redukcji losowości (ten z braniem wszystkich punktów w otoczeniu), z dowodem.

5. Algorytm redukcji losowości przez błądzenia losowe — definicja algorytmu oraz szacowanie prawdopodobieństwa błędu

6. Definicja produktu kartezjańskiego i tensorowego oraz potęgi grafu, zachowanie spektrum przy tych operacjach z dowodem.

7. Nierówności wiążace ekspansje i przerwy spektralne.

8. Definicja zygzaka i umiejętność narysowania zygzaka prostych grafów (np. zadanie 60)

9. Własności zygzaka (liczba wierzchołków, stopień, przynajmniej jedno szacowanie na ekspansję)

10. Konstrukcja deterministyczna dużego ekspandera używająca zygzaka jako czarnej skrzynki (wraz z definicją z zadania 77)

11. Twierdzenie $L = SL$ — sformułowanie

12. Randomizowany algorytm $L = SL$ z dowodem

13. Twierdzenie PCP — sformułowanie twierdzenia oraz sformułowania trzech kroków (preprocesing, amplifikacja, kompozycja).

2.2 Wersja zaawansowana

1. Dowód nierówności wiążących przerwy spektralne i ekspansje

2. Dowód własności zygzaka

3. Dowody konstrukcji ekspandera (wraz z zadaniami 77 i 78)

4. Dowód twierdzenia $L = SL$ **albo** dowód kroku o preprocesingu oraz precyzyjny szkic dowodu twierdzenia o amplifikacji z twierdzenia PCP

5. Dowód własności algorytmu redukcji losowości

6. Expander mixing lemma z dowodem

3 Minory

3.1 Wersja podstawowa

1. WQO — definicja, podstawowe włanośści (zadania 79, 80, 111). Lemat 1.5 (skończone podzbiory WQO są WQO) z dowodem.

2. Relacja bycia minorem i topologicznym minorem. Przykłady.

3. Twierdzenie Kruskala (twierdzenie 1.6).

4. Treewidth. Definicja, przykłady, sformułowanie gry o policjantach i złodzieju (zadanie 97). Podstawowe własności (zadania 84–91).

5. Ciernie. Definicja. Dowód, że w dekompozycji drzewowej istnieje worek pokrywający ciernie (lemat 2.2). Twierdzenie, że minimalna szerokość dekompozycji odpowiada maksymalnemu rzędowi ciernia.

6. Definicja zbioru zewnętrznie k-spójnego (definicja 2.4). Dowód, że zbiór zewnętrznie k-spójny o dużych parametrach implikuje duży treewidth (zadanie 102).

7. Twierdzenie o kracie.

8. Wyprowadzenie z twierdzenia o kracie twierdzenia Robertsona-Seymoura dla grafów planarnych.

9. Sformułowanie twierdzenia Robertsona-Seymoura.

10. Zastosowania: rozpoznawanie klas grafów zamkniętych na branie minorów (twierdzenia 4.7, 4.8 i 4.9).

11. Algorytmy na rozpoznawanie treewidthu (twierdzenia 4.10, 4.11 i 4.12).

12. Algorytmy dynamiczne po dekompozycji drzewowej. Bidimensionality. (zadania 123–131).

3.2 Wersja zaawansowana

1. Dowód twierdzenia Kruskala.

2. Definicja k-splątania i lemat, że duży treewidth daje duże splątanie (definicja 2.5 i lemat 2.6, bez dowodu).

3. Dowód twierdzenia o cierniach i dekompozycjach drzewowych.

4. Dowód twierdzenia o kracie dla dowolnych grafów (bez liczenia stałych, wystarczy „dużo” i „mało”) (nie trzeba dowodzić lematu o splątaniach).

5. Szkic dowodu Robertsona-Seymoura (sekcja 4.1 bez definicji 4.3 i 4.4 i topologicznych szczegółów 4.1.3).

4 Kolorowania

4.1 Wersja podstawowa

1. Kolorowania, kolorowania listowe — wierzchołkowe i krawędziowe. Definicje $\chi(G)$, $\chi'(G)$, $ch(G)$, $ch'(G)$. Zadanie 132.
2. Łatwe szacowania liczby chromatycznej. Lematy 1.3 i 1.4 z dowodami.
3. Algorytm kolorowania zachłannego, definicja $col(G)$, dowód optymalizacji $col(G)$.
4. Własności algorytmu, zadania 135 i 136.
5. Twierdzenia Brooksa, Hajnala–Szemerediego i Erdosa
6. Twierdzenie o pięciu barwach z dowodem
7. Twierdzenia Thomassena, Koniga, Vizinga
8. Definicja grafu doskonałego, przykłady (tj. zadanie 141 bez dowodu)
9. Twierdzenia Lovasza (2.5 i 2.7)
10. Twierdzenie Chudnovsky–Robertson–Seymour–Thomas o charakteryzacji grafów doskonałych
11. Sformułowanie twierdzenia o czterech barwach
12. Równoważność trzykolorowań krawędziowych i czterokolorowań wierzchołkowych, z dowodem.
13. Minimalny kontrprzykład na twierdzenie o 4 barwach nie ma wierzchołków stopnia 4 i mniej, z dowodem.

4.2 Wersja zaawansowana

1. Wielomian chromatyczny (zad 139 z dowodem)
2. Dowód twierdzenia Thomassena
3. Dowód zadania 141
4. Dowody obydwu twierdzeń Lovasza
5. Definicja konfiguracji, zbioru spójnego, żebra, sparowania ze znakami, konfiguracji redukowalnej, wolnego uzupełnienia.
6. Dowód, że zbiór możliwych kolorowań wolnego uzupełnienia jest spójny (przynajmniej dla nienawiniętego cyklu)
7. Idea dowodu komputerowego redukowalności konfiguracji
8. Zadanie 147 z dowodem
9. Discharging — co to jest i jak to działa, z przykładem (zadanie 150 z dowodem lub zadanie 159 z dowodem dla stałej 20)
10. Idea dowodu nieuniknioności konfiguracji redukowalnych przez discharging.