Zadania domowe, 8 seria

Wojciech Czerwinski

8.1 Stosuje technike zwana discharging. W zasadzie ku mojemu zdziwieniu jest to bardzo niewielka modyfikacja zadania z cwiczen :). Robie to zadanie nie wprost. Przypuscmy, ze dla kazdego wierzcholka sasiadujacego ze sciana mam $d + l \geqslant 9$.

Kazdemu wierzcholkowi o stopniu d przyporzadkowuje ladunek $3(4 - d)$. Kazdej scianie o l bokach przyporzadkowuje ladunek $3(4 - l)$. Spojrzmy jaka jest suma ladunkow w grafie: $\sum_v 3(4 - deg(v)) + \sum_f 3(4 - l(f)) = 12n + 12f - 6m - 6m = 12(n + f - m) \geqslant 24$. W ostatniej rownosci skorzystalem ze wzoru Eulera, mowiacego, ze $n - m + f = 2$ dla grafow spojnych oraz $n - m + f > 2$ dla niespojnych.

Teraz przesuwam nieco ladunki, tak, by ostatecznie kazdy wierzcholek i kazda sciana mialy ladunek niedodatni, co doprowadzi do sprzecznosci. Na poczatek zauwazam, ze wsrod wierzcholkow jedynie te o stopniu 3 maja ladunek dodatni - konkretnie ladunek 3. Przekazuje zatem z kazdego takiego wierzcholka do kazdej jego sasiadujacej sciany po 1 ladunku. Poniewaz wierzcholek o stopniu 3 ma 3 sasiadujace sciany, wiec po takiej operacji bedzie mial ladunek rowny 0.

Spojrzmy teraz na sciany. Pierwotnie jedynie sciany trojkatne mogly miec dodatni ladunek - tymi zajmiemy sie pozniej. Pewne sciany jednak mogly dostac dodatkowy ladunek - sciany, ktore maja sasiadujace wierzcholki stopnia 3. Zauwazmy, ze z warunku $d + l \geqslant 9$ wynika, ze taka sciana musi miec co najmniej 6 bokow. Policzmy jaki ladunek moze miec teraz taka sciana. Miala najpierw $3(4 - l)$, a teraz dostala maksymalnie po jednym od kazdego wierzcholka, czyli maksymalnie l. Zatem w sumie ma nie wiecej niz $3(4 - l) + l = 12 - 3l + l = 12 - 2l \leqslant 0$, gdzie ostatnia nierownosc wynika z tego, ze $l \geqslant 6$.

Zatem jedynymi obiektami, ktore moga miec ladunek dodatni sa sciany trojkatne, maja one ladunek 3. Przemieszczamy zatem z takiej sciany po jednym ladunku do kazdego z jej wierzcholkow. Po tej operacji jedynymi obiektami, ktore moga miec ladunek dodatni sa wierzcholki, ktore sasiaduja ze scianami trojkatnymi, przyjrzyjmy sie im.

Jesli wierzcholek sasiaduje ze sciana trojkatna, to z warunku $d+l \geqslant 9$ musi miec stopien co najmniej 6. Policzmy wiec jaki jest jego ladunek. Na poczatku mial $3(4-d)$, a potem dostal co najwyzej d (po jednym od kazdej sasiadujacej sciany). Zatem ma nie wiecej niz $3(4-d)+d = 12-3d+d = 12-2d \leqslant 0$, gdyz $d \geqslant 6$.

Zatem ostatecznie kazda ze scian i kazdy z wierzcholkow ma ladunek niedodatni, a suma ladunkow w grafie jest nie mniejsza niz 24. Sprzecznosc z zalozeniem, ze graf spelniajacy $d + l \geqslant 9$ istnieje.

8.2 Niech graf G bedzie krytycznie k-kolorowalny. Pokaze najpierw, ze dla kazdych niepustych zbiorow wierzcholkow V_1, V_2 takich, ze $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ oraz $V_1 \cup V_2 = V(G)$ pomiedzy V_1 a V_2 jest przynajmniej $k-1$ krawedzi.

Przypuscmy, ze dla pewnych niepustych V_1 i V_2 jest pomiedzy nimi co najwyzej $k-2$ krawedzi. Oznaczmy $G_1 = G(V_1)$ oraz $G_2 = G(V_2)$. Poniewaz G jest krytycznie k-kolorowalny, to wiemy, ze G_1 oraz G_2 dadza sie pokolorowac kazdy na $k-1$ kolorow. Pokaze teraz, ze jesli pomiedzy nimi jest co najwyzej $k-2$ krawedzi, to G da sie pokolorowac na $k-1$ kolorow. Ponumerujmy kolory numerami od 1 do $k-1$ w G_1 oraz w G_2. Spojrzmy pomiedzy jakimi parami kolorow ida krawedzie z G_1 do G_2.

Jesli zadna krawedz nie laczy dwoch takich samych numerow, to jestesmy w domu, pokolorowalismy G na $k-1$ kolorow. Zauwazmy jednak, ze mozemy przepermutowywac kolory, np w G_2. Oznaczmy przez π_j taka permutacje, ze $\pi_j(i) = (i+j) \mod (k-1) + 1$. Permutacji tego typu jest $k-1$, od π_0 bedacej identycznoscia do π_{k-2}. Zauwazmy, ze jesli jakas krawedz laczy dwa takie kolory o tym samym numerze, to tylko w jednej π_j, w pozostalych laczy kolory o innych numerach. Zatem skoro permutacji jest $k-1$, a krawedzi $k-2$, to z zasady szufladkowej Dirichleta istnieje permutacja, w ktorej zadna krawedz nie laczy kolorow o tym samym numerze. Zatem uzywajac tej permutacji mozemy pokolorowac G na $k-1$ kolorow. Sprzecznosc.

Korzystajac z pokazanego lematu udowodnie, ze G jest $k-1$-krawedziowo spojny. Spojrzmy na pewne dwa wierzcholki u oraz v. Pokaze, ze po usunieciu $k-2$ krawedzi bedzie istniala sciezka z u do v.

Oznaczmy przez H graf G po usunieciu pewnych konkretnych $k-2$ krawedzi. Chcemy, by w H byla sciezka z u do v. Z lematu wynika, ze dla kazdych V_1, V_2 takich, ze $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ oraz $V_1 \cup V_2 = V$ w G jest miedzy nimi minimum $k-1$ krawedzi, czyli w H minimum jedna. Pokazemy teraz, ze z u da sie dojsc do kazdego $v \in V \setminus \{u\}$. Przypuscmy przeciwnie, ze do pewnego v sie nie da. Niech wowczas W bedzie maksymalnym podzbiorem $V \setminus \{u\}$, do ktorego da sie dojsc z u. Wiadomo tez, ze $V \setminus W \setminus \{u\} \neq \emptyset$. Z lematu wiadomo jednak, ze w H istnieje krawedz miedzy $W \cup \{u\}$ a $V \setminus W \setminus \{u\}$, czyli jednak da sie dojsc do jakiegos wiekszego zbioru. Sprzecznosc z zalozeniem, ze do pewnego v nie da sie dojsc.

Zatem po usunieciu $k-2$ krawedzi G jest spojny, czyli G jest $k-1$-krawedziowo spojny.

8.3 Bede pokazywal, ze graf $L(G)$ jest doskonaly wtedy i tylko wtedy, gdy graf G nie posiada cyklu prostego o dlugosci nieparzystej i wiekszej lub rownej 5.

Bede korzystal z twierdzenia, ktore mowi, ze graf jest doskonaly wtedy i tylko wtedy, gdy nie posiada jako indukowanego cyklu C_{2n+1} ani tez jego dopelnienia dla $n \geqslant 2$.

Najpierw pokaze, ze graf $L(G)$ nigdy nie posiada jako podgrafu indukowanego dopelnienia cyklu C_{2n+1} dla $n \geqslant 3$ (czyli dopelnienia cykli nieparzystych dluzszych niz 7). Przypuscmy, ze graf $L(G)$ posiada taki podgraf, kolejne wierzcholki tego podgrafu oznaczmy $e_1, e_2, \ldots, e_{2n+1}$. Zauwazmy, ze e_1 ma polaczenie z e_3, e_4, e_5, e_6 (i moze i innymi tez). Dla wierzcholka e w grafie $L(G)$ oznaczmy $f(e)$ krawedz, ktorej on odpowiada w grafie G. Niech $f(e_1) = (v_1, v_2)$. $f(e_3)$ jest incydentna z $f(e_1)$, zalozmy wiec bez straty ogolnosci, ze jest incydentna w v_1 i $f(e_3) = (v_1, v_3)$. $f(e_4)$ tez jest incydentna z $f(e_1)$, ale z $f(e_3)$ nie, wiec musi byc incydentna z $f(e_1)$ w v_2. Musi byc zatem $f(e_4) = (v_2, v_4)$ dla pewnego v_4 z G. Krawedz $f(e_5)$ jest incydentna z $f(e_1)$, a z $f(e_4)$ nie, wiec jest postaci $f(e_5) = (v_1, v_5)$ dla pewnego v_5. Krawedz $f(e_6)$ jest incydentna z $f(e_1)$, ale z $f(e_5)$ nie, ale z $f(e_3)$ tak, wiec musi byc postaci $f(e_6) = (v_2, v_3)$. Krawedz $f(e_2)$ jest incydentna z e_4 oraz z e_6, ale z e_1 nie, wiec musi byc postaci $f(e_2) = (v_3, v_4)$. Jednak wowczas $f(e_2)$ jest incydentna z $f(e_3)$, sprzecznosc.

Tym samym pokazalismy, ze w grafie $L(G)$ nie istnieja podgrafy indukowane bedace dopelnieniami cykli C_{2n+1} dla $n \geqslant 3$. Dopelnienie C_5 to jest C_5. Zatem pytanie czy $L(G)$ doskonaly sprowadza sie do pytania, czy $L(G)$ zawiera cykl C_{2n+1} dla $n \geqslant 2$ jako podgraf indukowany.

Zauwazmy, ze jesli G zawiera cykl prosty $v_1 - v_2 - \ldots - v_{2n+1} - v_1$, to w grafie $L(G)$ odpowiedniki krawedzi $(v_1, v_2), (v_2, v_3), \ldots, (v_{2n}, v_{2n+1}), (v_{2n+1}, v_1)$ tworza podgraf indukowany bedacy cyklem prostym dlugosci $2n+1$.
Z kolei w druga strone - jesli mamy podgraf indukowany w $L(G)$ bedacy

cyklem prostym C_{2n+1}, to w grafie G jest cykl prosty dlugosci $2n+1$. Zatem $L(G)$ jest doskonaly wtedy i tylko wtedy, gdy w G nie ma cykli prostych dlugosci nieparzystej i wiekszej lub rownej 5.

Wedlug mnie ta charakteryzacja jest ladna. Nie wiem tez jak przeformulowac ja na inna ladna.