WZTG — seria 7

Tomasz Kulczyński

23 maja 2010

Zadanie 1

Chciałbym udowodnić, że $tw(G) = tw(H)$. Wiemy, że H powstaje z G przez zastosowanie skończonej liczby operacji polegających na zamianie krawędzi ab na krawędzie ac i cb, gdzie c jest nowym wierzchołkiem, natomiast G powstaje z H przez skończenie wiele operacji, z których każda polega na wybraniu wierzchołka x stopnia 2 i zlepieniu krawędzi yx i xz w krawędź yz oraz usunięcie wierzchołka x.

Pokażę, że żadna z tych operacji nie pogarsza szerokości drzewiastej, co dowiedzie, że jej nie zmieniają (bo są do siebie odwrotne).

Dodanie wierzchołka

Rozpatrzmy dwa przypadki:

1. $treewidth > 1$

   Rozpatrzmy optymalną dekompozycję drzewiastą. Niech t będzie wierzchołkiem, w którym jest krawędź ab, tzn. oba jej końce. Dodajmy dla t nowego sąsiada, t', który będzie zawierał wierzchołki a, b i c. Nie pogorszy to szerokości drzewiastej, a nowe drzewo będzie poprawną dekompozycją nowego grafu.

2. $treewidth \leqslant 1$

   Na ćwiczeniach pokazywaliśmy, że w takim razie graf jest lasem. Po zmianie, nadal pozostaje lasem, a więc nadal $treewidth \leqslant 1$

Usunięcie wierzchołka

Weźmy optymalną dekompozycję drzewiastą. Niech A_x, A_y i A_z będą amebami interesujących nas wierzchołków (przypominam, że chcemy usunąć x sąsiadujący tylko z y i z). Niech nową amebą y będzie $A_y \cup A_x$, przy zachowaniu całej reszty dekompozycji. Aby sprawdzić, czy jest to poprawna dekompozycja, musimy jedynie zbadać, czy jest w niej wierzchołek zawierający oba wierzchołki y i z. Jest tak, gdyż jest to wierzchołek, który zawierał wcześniej x i z, a taki na pewno istniał. Naturalnie, nowa dekompozycja ma nie gorszą szerokość.

Zadanie 2

Postępujemy zgodnie z rozdziałem 4.2.3 wykładów o minorach.

1. Uruchamiamy algorytm 4-aproksymacyjny znajdowania dekompozycji drzewiastej dla $t = 100\sqrt{k}$.
2. Jeśli znalazł dekompozycję, uruchamiamy dynamika opisanego poniżej, który daje odpowiedź.
3. Jeśli nie znalazł, to wiemy graf ma dużą kratę jako minor.
4. Zauważamy, że jeśli z grafu można usunąć k wierzchołków, aby pozostała część była lasem, to z jego minora również (usuwamy wierzchołki, w których są zlepione oryginalne).
5. Widzimy, że z kraty trzeba pozbyć się co najmniej połowy krawędzi, a usunięcie wierzchołka powoduje pozbycie się co najwyżej 4 z nich, więc musimy usunąć co najmniej co czwarty wierzchołek, co jest liczbą większą od k.
6. W związku z powyższym odpowiadamy „NIE".

Dynamik

Dla każdego wierzchołka dekompozycji i każdego pogrupowania jego wierzchołków obliczamy, ile wierzchołków trzeba usunąć w tym wierzchołku lub jego poddrzewie w dekompozycji, aby uzyskać dokładnie takie połączenia. Pogrupowań jest $O(t^t)$, gdzie t jest szerokością dekompozycji. Oczywiście, dekompozycję możemy tak zmienić, aby żaden wierzchołek nie miał więcej niż dwóch synów.

Wtedy, wiedząc które wierzchołki grafu z aktualnego wierzchołka dekompozycji usuwamy oraz znając pogrupowania synów ($O(2^t \cdot \ t^t \cdot \ t^t)$ kombinacji) oraz krawędzie które należy rozpatrzeć w ramach przetwarzania aktualnego wierzchołka, otrzymujemy końcowe pogrupowanie i ilość wierzchołków do usunięcia.

Na koniec sprawdzamy, czy dla któregoś pogrupowania w wierzchołku dekompozycji ilość usuniętych wynosi co najwyżej k i w zależności od tego, dajemy ostateczną odpowiedź.

Cały algorytm działa w żądanym czasie.

Zadanie 3

Skonstruuję ciąg drzew, którego elementy mają nieograniczoną szerokość ścieżkową, co dowiedzie, że nie istnieje taka stała k.

Weźmy D_0 będące pojedynczym izolowanym wierzchołkiem (korzeniem tego drzewa). Dla $n \geqslant 1$, D_n będzie się składał z korzenia, oraz trzech drzew D_{n-1}, których korzenie połączone będą z korzeniem D_n. Chciałbym pokazać indukcyjnie, że $pathwidth(D_n) \geqslant n$. Oczywiście, $pathwidth(D_0) \geqslant 0$.

Dowód kroku indukcyjnego: wiemy że $pathwidth(D_{n-1}) \geqslant n-1$ i chcemy pokazać że $pathwidth(D_n) \geqslant n$. Trzeba dowieść, że dowolna dekompozycja ścieżkowa ma szerokość co najmniej n. Weźmy więc dowolną taką dekompozycję.

Ameba każdego wierzchołka jest spójna, więc jest przedziałem na ścieżce. Spójrzmy na trzy drzewa D_{n-1} zawarte w D_n. Dla każdego z tych trzech drzew, suma teoriomnogościowa po jego wierzchołkach ich ameb jest przedziałem. Suma przedziałów jest bowiem zbiorem rozłącznych przedziałów, a w tym wypadku nie możemy mieć rozłącznych części, gdyż wtedy drzewo byłoby niespójne.

Rozpatrzmy teraz takie przedziały dla tych trzech drzew. Któryś z tych przedziałów zaczyna się najwcześniej na ścieżce, a któryś najpóźniej kończy (być może ten sam, być może też są remisy). W dowolnym razie, jeden z nich (jego drzewo oznaczam A) zaczyna się nie wcześniej niż jakiś inny i kończy nie później niż jakiś inny. Przedział będący amebą korzenia D_n musi przecinać się niepusto z każdym z trzech przedziałów jego sąsiadów, a więc w szczególności z każdym z trzech przedziałów odpowiadających trzem poddrzewom. W takim razie, suma ameb wierzchołków z $D_n \setminus A$ pokrywa cały przedział A. Stąd $pathwidth(D_n) \geqslant 1 + pathwidth(A)$, ale A jest drzewem D_{n-1}, czyli $pathwidth(D_n) \geqslant 1 + (n-1) = n$, co kończy dowód tezy indukcyjnej i całego zadania.