Wybrane zagadnienia teorii grafów — seria 6

minory, część 1, 12.04.2010–10.05.2010

Zadanie 1. Graf H składa się z cyklu na sześciu wierzchołkach $v_1v_2v_3v_4v_5v_6$, w którym dodatko poprowadzono trzy krawędzie, łączące naprzeciwległe wierzchołki na cyklu (czyli krawędzie v_1v_4, v_2v_5, v_3v_6). Graf G to krata 100×100 z dodatkowymi przekątnymi w jedną stronę: formalnie, wierzchołki G są indeksowane parą liczb (i, j), $1 \leqslant i, j \leqslant 100$ i (i, j) oraz (i', j') są połączone krawędzią jeśli $|i-i'|+|j-j'| = 1$ lub $(i-i')(j-j') = 1$. Czy H jest minorem G?

Zadanie 2. W grafie G przez $\mathrm{maxpath}(G)$ oznaczmy liczbę wierzchołków na najdłuższej ścieżce prostej, a przez $\mathrm{maxcycle}(G)$ oznaczmy liczbę wierzchołków na najdłuższym cyklu prostym. Załóżmy, że G nie jest lasem. Pokaż, że

1. $\mathrm{tw}(G) < \mathrm{maxpath}(G)$ (rozwiązanie tylko tego podpunktu jest warte dwa punkty),
2. $\mathrm{tw}(G) < \mathrm{maxcycle}(G)$.

Zadanie 3. Niech $k \geqslant 2$ będzie liczbą całkowitą. Przez $\mathcal{G}_k$ oznaczmy zbiór wszystkich grafów prostych, w których nie ma ścieżki prostej dłuższej niż k. Pokaż, że zbiór $\mathcal{G}_k$, uporządkowany przez relację bycia podgrafem, jest dobrym quasi–porządkiem (well–quasi–ordering).