Zadania domowe - seria 6

Marek Cygan
cygan@mimuw.edu.pl

1 Zadanie 1

Zauważmy, że w graf H to tak naprawdę $K_{3,3}$, gdzie po jednej stronie mamy $V_1 = \{v_1, v_3, v_5\}$ a po drugiej $V_2 = \{v_2, v_4, v_6\}$. Każdy wierzchołek ma stopień dokładnie 3 a każda krawędź w H łączy V_1 z V_2. Jak wiemy $K_{3,3}$ nie jest planarne, a graf G jest. Minor grafu planarnego jest planarny, zatem H nie jest minorem G.

2 Zadanie 2

Niech G będzie dowolnym grafem który nie jest lasem. Rozważmy drzewo T będące drzewem przeszukiwania algorytmu DFS. W oparciu o T stwórzmy dekompozycję drzewową G. Dla $t \in T$ do zbioru V_t weźmy t oraz wszystkich przodków t' węzła t w drzewie przeszukiwania T, z których wychodzi krawędź (drzewowa bądź niedrzewowa) prowadząca do poddrzewa zaczepionego w t. To jest dobra dekompozycja drzewowa, gdyż:

- $V(G) = \cup_{t \in T} V_t$, gdyż $t \in V_t$ oraz $V(T) = V(G)$,
- weźmy krawędź $uv \in E(G)$, T jest drzewem DFS zatem uv łączy potomka z przodkiem, niech u będzie potomkiem v, z konstrukcji V_u mamy $u, v \in V_u$, gdyż krawędź z v prowadzi po poddrzewa zaczepionego w u,
- dla każdego $v \in V(G)$ zbiór $t : v \in V_t$ jest spójny w T, gdyż najwyższym węzłem $t \in T$ (zakładając ukorzenienie w węźle od którego zaczynamy przeszukiwanie DFS) takim, że $v \in V_t$ jest $t = v$, a jeśli $v \in V_a$ to a musi być potomkiem t w T oraz dla każdego b będącego na ścieżce od a do t w T mamy $v \in V_b$.

Lemat 1. *Dla każdego* $t \in T$ *mamy* $|V_t| \leq \mathrm{maxcycle}(G) \leq \mathrm{maxpath}(G)$.

Dowód. Weźmy dowolne $t \in T$. Niech $x = |V_t| - 1$. Możemy założyć że $x \geq 2$ gdyż w przeciwnym wypadku teza w oczywisty sposób zachodzi. Zauważmy, że w V_t wszystkie wierzchołki poza t to węzły powyżej t które leżą na ścieżce od t do korzenia, gdyż że w drzewie DFS nie ma krawędzi skośnych. Weźmy wierzchołek a z $V_t \setminus \{t\}$ który jest najbliżej korzenia w drzewie DFS. Zauważmy, że pomiędzy wierzchołkami a oraz t jest co najmniej $x-1$ wierzchołków, gdyż a był najwyżej. Skoro $a \in V_t$ oraz $x \geq 2$ to z a wychodzi krawędź niedrzewowa prowadząca do poddrzewa zaczepionego w t, ta krawędź zamyka cykl, który ma conajmniej $x + 1 = |V_t|$ wierzchołków, co kończy gdyż $\mathrm{maxpath}(G) \geq \mathrm{maxcycle}(G)$. □

Z powyższego lematu mamy $\mathrm{tw}(G) < \mathrm{maxcycle(G)} \leq \mathrm{maxpath}(G)$.

3 Zadanie 3

Zauważmy, że możemy skupić się na grafach spójnych, gdyż jeśli pokażemy że spójne grafy proste w których nie ma ścieżki prostej dłuższej niż k uporządkowane przez relację bycia podgrafem stanowią WQO, to z lematu 1.5 z notatek (o skończonych podzbiorach) dostaniemy uporządkowanie wszystkich grafów z $\mathcal{G}_k$.

Niech zbiór $\mathcal{A}_k$ będzie zbiorem wszystkich drzew przeszukiwania algorytmu DFS, czyli pojedynczy element zbioru $\mathcal{A}_k$ składa się z:

- ukorzenionego drzewa przeszukiwania o głębokości (długości ścieżki od korzenia do najdalszego liścia) nie większej niż k, w którym dzieci węzłów są uporządkowane (ze względu na kolejność ich odwiedzania),
- zbioru krawędzi niedrzewowych, które zawsze łączą przodka z potomkiem.

Relację $\leq$ na elementach $\mathcal{A}_k$ definiujemy następująco. Niech $a_1, a_2 \in \mathcal{A}_k$. Zachodzi $a_1 \leq a_2$ wtw gdy a_1 da się otrzymać z a_2 przez nieujemną liczbę następujących operacji:

- usunięcie krawędzi niedrzewowej,
- usunięcie liścia z drzewa (wraz z incydentnymi krawędziami zarówno drzewową jak i niedrzewowymi).

Lemat 2. *Dla każdego $k \geq 2$ $(\mathcal{A}_k, \leq)$ jest WQO.*

Dowód. Postępujemy tak jak w dowodzie tw. Kruskala. Przeprowadzamy dowód nie wprost, czyli konstruujemy ciąg kontrprzykład w taki sposób, że jeśli mamy $a_1, \ldots, a_n$ to jako a_{n+1} wybieramy element $\mathcal{A}_k$ o najmniejszej liczbie węzłów, taki że $a_1, \ldots, a_{n+1}$ jest prefiksem jakiegoś ciągu kontrprzykładu.

Zauważmy, że w każdym elemencie a ze zbioru $\mathcal{A}_k$ możemy spojrzeć na pierwszy przetworzony węzeł, czyli innymi słowy na najbardziej lewy liść. Wierzchołek ten, oznaczmy go $v = lewylisc(a)$, możemy scharakteryzować przez jego głębokość w drzewie oraz zbiór wierzchołków na ścieżce do v do korzenia do których prowadzą krawędzie niedrzewowe, jako że operujemy na grafach prostych, to zbiór ten możemy scharakteryzować przez liczbę od 0 do 2^k. Niech para (c, d) (gdzie $1 \leq c \leq k$, $0 \leq d \leq 2^k$) będzie charakteryzacją węzła $lewylisc(a)$ dla danego $a \in \mathcal{A}_k$ zawierającego co najmniej dwa węzły. Przez a' oznaczmy strukturę, która powstaje z a przez usunięcie węzła $lewylisc(a)$ wraz z incydentnymi krawędziami drzewową i niedrzewowymi. Zauważmy, że:

- $a' \in \mathcal{A}_k$,
- $a' \leq a$,
- mając dane a' oraz parę (c, d) możemy uzyskać a – bierzemy najbardziej lewy węzeł a' na głębokości $c-1$ i doczepiamy mu najbardziej lewego syna, którego podłączamy krawędziami niedrzewowymi z przodkami z maski bitowej d.

Skoro nasz ciągu $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ jest kontrprzykładem, to wszystkie elementy a_i mają co najmniej dwa węzły. Niech para (c_i, d_i) będzie charakteryzacją węzła $lewylisc(a_i)$. Jako parę (c', d') weźmy dowolną charakteryzację która występuje nieskończenie wiele razy (z uwagi na skończoną liczbę możliwych charakteryzacji takie (c', d') zawsze istnieje). Niech $n_1, n_2, \ldots$ będzie rosnącym ciągiem indeksów elementów z kontrzykładu $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ dla których $lewylisc(a_i)$ ma charakteryzację (c', d').

Rozważmy ciąg:

$$a_1, \ldots, a_{n_1 - 1}, a'_{n_1}, a'_{n_2}, \ldots$$

Z uwagi na minimalność naszego kontrprzykładu $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ powyższy ciąg nie jest kontrprzykładem. Zauważmy, że jeśli byłoby $a_i \leq a_j$, dla $1 \leq i < j < n_1$ to $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ nie byłby kontrzykładem. Analogicznie nie może być $a_i \leq a'_{n_j}$, dla $1 \leq i < n_1 \leq n_j$, gdyż wtedy mielibyśmy $a_i \leq a'_{n_j} \leq a_{n_j}$. Zatem mamy $a'_{n_i} \leq a'_{n_j}$ dla pewnych $1 \leq i < j$. Jako że a'_{n_j} i a'_{n_j} mają tą samą charakteryzację (c', d'), to po dodaniu usuniętego najbardziej lewego liścia będziemy mieli $a_{n_i} \leq a_{n_j}$, sprzeczność, zatem $(\mathcal{A}_k, \leq)$ jest WQO. $\square$

Skoro $(\mathcal{A}_k, \leq)$ jest WQO, to spójne grafy należące do $\mathcal{G}_k$ z relacją bycia pografem też są WQO, gdyż dla każdego spójnego grafu $G \in \mathcal{G}_k$ możemy znaleźć drzewo DFS które należy do $\mathcal{A}_k$, gdyż głębokość tego drzewa na pewno nie będzie większa niż k, a jeśli dla dwóch grafów spójnych $G_1, G_2 \in \mathcal{G}_k$ ich drzewa dfs $a_1, a_2 \in \mathcal{A}_k$ spełniają $a_1 \leq a_2$, to G_1 jest podgrafem G_2.