Wybrane zagadnienia teorii grafów — seria 5

ekspandery, część 2, 29.03.2010–26.04.2010

Zadanie 1. Udowodnij, że dla każdej ustalonej liczby naturalnej $d \geqslant 2$ każdy graf prosty d–regularny o n wierzchołkach ma bezwzględną przerwę spektralną nie większą niż $d - \sqrt[4]{d(2d-1) - O(1/n)}$.

Zadanie 2. Niech G będzie Klee–grafem. Udowodnij, że $\Delta_G < 100/n$. (uwaga — stała 100 nie jest optymalna, ciekawi nas, jaka najlepsza stała zostanie wyciśnięta, ale dowolna nie gorsza niż 100 będzie zaakceptowana).

Zadanie 3. Niech $f : \mathbb{Z}_2^n \to \mathbb{Z}_2$. Niech $S \subset \mathbb{Z}_2^n$ będzie takim zbiorem, że graf G na zbiorze wierzchołków $\mathbb{Z}_2^n$ z krawędziami postaci $(x, x+s)$ dla $s \in S$, ma bezwzględną przerwę spektralną przynajmniej $|S|(1-\lambda)$, $1 > \lambda > 0$. Rozważamy następujący algorytm sprawdzania, czy f jest funkcją liniową: losujemy wierzchołek $x \in V(G)$ i $s \in S$, i sprawdzamy, czy $f(x+s) = f(x) + f(s)$ — jeśli tak, to mówimy, że liniowa, a jeśli nie, to nie. Niech $\phi(x)$ będzie najliczniejszą (lub dowolną z najliczniejszych w razie remisu) spośród wartości $f(x+y) - f(y)$ po $y \in V(G) = \mathbb{Z}_2^n$. Udowodnij, że istnieje taka stała $\delta = \delta(\lambda) > 0$, że jeśli nasz algorytm odrzuca funkcję f z prawdopodobieństwem mniejszym niż δ, to zachodzą następujące fakty:

- $\mathbb{P}_{y \in V(G)}(\phi(x) = f(x+y) - f(y)) > 99/100$;
- ϕ jest liniowa;
- f różni się od pewnej funkcji afinicznej (tj. liniowa plus stała) na co najwyżej $2^n/100$ argumentach.

Uwagi nieistotne dla treści zadania, ale nieco tłumaczące, po co to jest — po pierwsze, da się skonstruować taki zbiór S rozmiaru $poly(n)$ jak powyżej efektywnie (tj. w czasie $poly(n)$) metodami ekspanderowymi. Po drugie, to, co powyżej daje tzw. test liniowości — czyli metodę probabilistycznego rozstrzygania, czy funkcja jest liniowa, która myli się z dużym prawdopodobieństwem tylko wtedy, gdy f jest bliska funkcji afinicznej (tj. pokrywa się z jakąś funkcją afiniczną na przynajmniej 99% wierzchołków). Mogłoby się wydawać, że jest to mało twórcze (bo prymitywny algorytm losujący po prostu dwa wierzchołki z całego grafu używa tylko dwa razy tyle losowych bitów, a też działa), ale w szeregu zastosowań okazuje się, że taka redukcja losowości jest istotna.