Marcin Andrychowicz
seria 5

Zad. 1 Niech M będzie macierz sąsiedztwa grafu o wektorach własnych $v_1, v_2, \ldots, v_n$ tworzących bazę ortonormalną, przy czym v_1 odpowiada wartości własnej d. Mamy udowodnić, że $\Delta' \leqslant d - \sqrt[4]{d(2d-1) - O(1/n)}$, co jest równoważne $\lambda \geqslant \sqrt[4]{d(2d-1) - O(1/n)}$, gdzie λ jest modułem drugiej co do modułu wartości własnej.

Niech $q \in V(G)$ będzie dowolne. Niech p będzie wektorem w $\mathbb{R}^n$ mającym wartość 1 na współrzędnych odpowiadających sąsiadom q i 0 na pozostałych współrzędnych. Wówczas $\|p\|_2^2 = d$. Niech p ma w bazie wektorów własnych rozkład: $p = (\frac{d}{n}, \frac{d}{n}, \ldots, \frac{d}{n}) + \sum_{i=2}^n a_i v_i$, co implikuje $\|p\|_2^2 = \frac{d^2}{n} + \sum_{i=2}^n a_i^2$. Wówczas $\frac{M}{d} p = (\frac{d}{n}, \frac{d}{n}, \ldots, \frac{d}{n}) + \sum_{i=2}^n a_i' v_i$, gdzie $|a_i'| \leqslant \frac{\lambda}{d}|a_i|$. Zatem

$$\|\frac{M}{d}p\|_2^2 = \frac{d^2}{n} + \sum_{i=2}^n a_i'^2 \leqslant \frac{d^2}{n} + \sum_{i=2}^n (\frac{\lambda}{d} a_i)^2 \leqslant \frac{d^2}{n} + \left(\frac{\lambda}{d}\right)^2 (d - \frac{d^2}{n}) \leqslant \frac{d^2}{n} + \frac{\lambda^2}{d}.$$

Zastanówmy się, co wiemy o wektorze $w = \frac{M}{d}p$. Na pewno $w_q = 1$. Wiemy też, że $w_i \geqslant 0$ oraz $\sum_{i=1}^n w_i = d$. Ponadto niezerowe wartości w_i są nie mniejsze niż d^{-1}. Zatem na mocy nierówności Hardy'ego-Littlewood'a-Poly (zwanej też nierównością Karamaty) dla funkcji $f(x) = x^2$, która jest rosnąca i wypukła na $[0, \infty)$ zachodzi:

$$\|\frac{M}{d}p\|_2^2 = \sum_{i=1}^n w_i^2 \geqslant w_q^2 + d(d-1) \cdot \frac{1}{d^2} = 1 + \frac{d-1}{d} = 2 - \frac{1}{d}.$$

Łącząc oba szacowania otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{n} + \frac{\lambda^2}{d} &\geqslant 2 - \frac{1}{d} && (1)\\
\lambda^2 &\geqslant \left(2 - \frac{1}{d}\right) d - \frac{d^3}{n} && (2)\\
\lambda &\geqslant \sqrt{(2d-1) - O(1/n)} && (3)\\
\lambda &\geqslant \sqrt[4]{4d^2 - 4d + 1 - O(1/n)} && (4)\\
\lambda &\geqslant \sqrt[4]{2d^2 - d - O(1/n)} && (5)\\
\lambda &\geqslant \sqrt[4]{d(2d-1) - O(1/n)} && (6)
\end{aligned}$$

Zad. 2 Pokażę, że istnieje $S \subset V(G)$, taki, że $n/6 < |S| \leqslant n/2$ oraz $E(S, \overline{S}) = 3$. Wówczas $\Delta(G) \leqslant 2h^E(G) < 2\frac{3}{n/6} = 36/n < 100/n$.

Wiemy, że S powstał z K_4 poprzez rozbicia wierzchołków na trójkąty. Niech $A, B, C, D \subset V(G)$ to zbiory wierzchołków, które powstały z 4 wierzchołków K_4. Jeśli $|A|, |B|, |C|, |D| \leqslant n/2$, to oczywiście $max(|A|, |B|, |C|, |D|) \geqslant n/4$, więc jeden ze zbiorów A, B, C, D spełnia nasze warunki.no W przeciwnym przypadku jedna z części ma rozmiar $> n/2$.

W dalszej części rozwiązania ograniczymy się tylko do tej części. Wierzchołek z którego ona powstała został rozbity na trójkąt, który był, być może, dalej rozbijany. Niech $X, Y, Z \subset V(G)$ to zbiory wierzchołków, które powstały z poszczególnych wierzchołków tego trójkąta. Jeśli $max(|X|, |Y|, |Z|) > n/2$, to przechodzimy do części rozmiaru $> n/2$ a następnie zaczynamy czytać ten paragraf od początku.

Wówczas zachodzi $|X|, |Y|, |Z| \leqslant n/2$ oraz $|X| + |Y| + |Z| > n/2$, więc jeden ze zbiorów X, Y, Z spełnia nasze warunki.

Zad. 3 Na algorytm z zadania możemy patrzeć jak na algorytm, który losuje krawędź (a, b) z ekspandera i sprawdza, czy $f(a) + f(b) = f(a + b)$. Jest to równoważne algorytmowi z zadania, gdyż

$$f(x) + f(s) = f(x+s) \Leftrightarrow f(x) + f(x+s) = f(s) \Leftrightarrow f(x) + f(x+s) = f(x + (x+s)).$$

Przyjmijmy $\delta(\lambda) = (1 - \lambda)/401$. Załóżmy, że pierwszy podpunkt zadania nie jest prawdziwy, więc istnieje $\alpha \in \mathbb{Z}_2^n$, takie, że $\mathbb{P}_y(\phi(\alpha) = f(\alpha + y) + f(y)) \leqslant 99.5\%$. Niech $p = \mathbb{P}_y(\phi(\alpha) =$

$f(\alpha + x) + f(x)) \leqslant 99.5\%$. Zdefiniujmy $A = \{x \in \mathbb{Z}_2^n : \phi(\alpha) = f(\alpha + x) + f(x)\}$ oraz $B = \{x \in \mathbb{Z}_2^n : \phi(\alpha) \neq f(\alpha + x) + f(x)\}$. Wówczas $|A| = p2^n$ oraz $|B| = (1 - p)2^n$.

Lemat 1.

$$x \in A \Leftrightarrow x + \alpha \in A$$

Dowód:

$$\begin{aligned} \phi(\alpha) = f(\alpha + x) + f(x) \quad &\Leftrightarrow \quad \phi(\alpha) = f(\alpha + x) + f(x) \qquad (7) \\ \phi(\alpha) = f(\alpha + x) + f(x) \quad &\Leftrightarrow \quad \phi(\alpha) = f(\alpha + (x + \alpha)) + f(x + \alpha) \qquad (8) \end{aligned}$$

Lemat 2. Dla $x \in A$ i $y \in B$ zachodzi

$$f(x) + f(y) = f(x + y) \text{ xor } f(x + \alpha) + f(y + \alpha) = f((x + \alpha) + (y + \alpha))$$

Dowód:

$$\begin{aligned} f(x) + f(y) + f(x + y) \quad &\neq \quad f(x) + f(y) + f(x + y) + 1 \qquad (9) \\ f(x) + f(y) + f(x + y) \quad &\neq \quad (f(x + \alpha) + \phi(a)) + (f(y + \alpha) + \phi(a)) + f(x + y) \qquad (10) \\ f(x) + f(y) + f(x + y) \quad &\neq \quad f(x + \alpha) + f(y + \alpha) + f((x + \alpha) + (y + \alpha)) \qquad (11) \\ f(x) + f(y) = f(x + y) \quad &\text{xor} \quad f(x + \alpha) + f(y + \alpha) = f((x + \alpha) + (y + \alpha)) \qquad (12) \end{aligned}$$

Z ostatniego lematu wynika, że $\mathbb{P}_{x \in A \wedge y \in B}(f(x) + f(y) = f(x+y)) = 50\%$. Zatem nasz algorytm wylosuje krawędź z $E(A, B)$ z prawdopodobieństwem $\frac{2E(A,B)}{2^n \cdot 2|S|}$, więc odrzuca f z prawdopodobieństwem co najmniej

$$\frac{E(A, B)}{2^n \cdot 2|S|} \geqslant \frac{h^E |B|}{2^n \cdot 2|S|} \geqslant \frac{\frac{\Delta}{2}|B|}{2^n \cdot 2|S|} \geqslant \frac{\frac{\Delta'}{2}|B|}{2^n \cdot 2|S|} \geqslant \frac{|S|(1-\lambda)|B|}{2^n \cdot 2|S|} = \frac{|S|(1-\lambda)(1-p)2^n}{2^n \cdot 2|S|} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{(1-\lambda)(1-p)}{2} \geqslant \frac{(1-\lambda)}{400} > \delta(\lambda),$$

co daje sprzeczność z założeniem. Zatem punkt pierwszy zadania zachodzi.

W punkcie drugim zadania, chcemy pokazać, że $\phi(a + b) = \phi(a) + \phi(b)$. Niech $l \approx^p r$ oznacza, że $\mathbb{P}_{x,y \in \mathbb{Z}_2^n}(l = r) \geqslant p$. Liczymy:

$$\phi(a+b) \approx^{99\%} f((x+a)+b)+f(x) \approx^{99\%} f(x+a)+\phi(b)+f(x) \approx^{99\%} f(x)+\phi(a)+\phi(b)+f(x) = \phi(a)+\phi(b).$$

Zatem $\phi(a + b) \approx^{97\%} \phi(a) + \phi(b)$, więc oczywiście $\phi(a + b) = \phi(a) + \phi(b)$, czyli punkt drugi zadania zachodzi.

Niech $X = \{x \in \mathbb{Z}_2^n : f(x) = \phi(x)\}$ oraz $Y = \{x \in \mathbb{Z}_2^n : f(x) \neq \phi(x)\}$. Ponadto niech $t = |X|/2^n$ Pokażę, że $min(t, 1 - t) < 1\%$, co implikuje 3. punkt zadania. Zauważmy, że dla $x \in X$ i $y \in Y$ zachodzi

$$f(x + y) \approx^{99.5\%} \phi(x) + f(y) = f(x) + f(y) \neq f(x) + \phi(y) \approx^{99.5\%} f(x + y).$$

Oznacza, to że dokładnie jedna z speudorówności ($\approx^{99.5\%}$) nie jest spełniona. Zatem liczba niespełnionych pseudorówności wynosi co najmniej $|X||Y|$. Z drugiej strony wiemy, że spełnione jest co najmniej $99.5\% \cdot 4^n$ takich pseudorówności, więc $|X||Y| \leqslant 0.5\% \cdot 4^n$, co implikuje $t(1-t) \leqslant 0.5\%$. Jednak $max(t, 1 - t) \geqslant 1/2$, co daje $min(t, 1 - t) \leqslant 1\%$.