

## Wybrane zagadnienia teorii grafów — seria 4

ekspandery, część 1, 15.03.2010–19.04.2010

Zadanie 1. Niech  $T_n$  będzie kratą toryczną  $n \times n$ , czyli grafem, gdzie  $V(T_n) = \{0, 1, \dots, n-1\}^2$ , i  $(a, b)$  jest połączone krawędzią z  $(c, d)$  jeśli  $a = c$  i  $b - d = \pm 1$  lub  $b = d$  i  $a - c = \pm 1$  (odejmowania wykonywane są modulo  $n$ ).  $T_n$  jest grafem 4-regularnym i np.  $(0, 0)$  sąsiaduje z  $(0, 1)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(0, n-1)$  i  $(n-1, 0)$ . Załóżmy, że  $n$  jest liczbą parzystą. Oblicz ekspansję wierzchołkową, krawędziową oraz wszystkie wartości własne  $T_n$ .

Zadanie 2. Niech  $G$  będzie grafem prostym  $d$ -regularnym o względnej przerwie spektralnej  $\Delta > 2$  i parzystej liczbie wierzchołków. Udowodnij, że  $G$  jest pokryty przez skojarzenia.

Zadanie 3. Niech  $G$  będzie multi-grafem  $d$ -regularnym z pętłami<sup>1</sup> o bezwzględnej przerwie spektralnej  $\Delta' > 0$ . Niech  $\delta < \Delta'/6$ . Niech  $G'$  powstaje z  $G$  poprzez usunięcie co najwyżej  $\delta|V|$  krawędzi. Udowodnij, że  $G'$  ma spójną składową o przynajmniej  $\left(1 - \frac{2\delta}{\Delta'}\right)|V|$  wierzchołkach.

---

<sup>1</sup>Tj.  $G$  jest grafem, w którym mogą być wielokrotne krawędzie i pętle, ale nie muszą.