Zadania domowe - seria 4

Marek Cygan
cygan@mimuw.edu.pl

1 Zadanie 1

Zauważmy, że graf T_n jest produktem kartejańskim dwóch cykli C_n. Ponadto z uwagi na fakt iż n jest liczbą parzystą graf T_n jest dwudzielny, gdyż moglibyśmy go pokolorować tak jak szachownicę.

Wiemy że spójny graf regularny jest dwudzielny wtw. gdy ma ekspansję wierzchołkową zero, zatem $h^V = 0$.

Na ćwiczeniach został udowodniony lemat, który mówi że jeśli graf jest produktem kartezjańskim dwóch grafów G i H to wartości własne mają postać $\lambda_i + \mu_j$, gdzie λ_i to wartość własna G a μ_j to wartość własna H. Ponadto na ćwiczeniach pokazaliśmy że wartości własne cyklu C_n są postaci:

$$2\cos(2\pi i/n), \text{dla } i = 0, \ldots, n-1$$

Zatem multizbiór wartości własnych T_n składa się z n wartości postaci $4\cos(2\pi i/n)$ dla $i = 0, \ldots, n-1$ oraz $n(n-1)/2$ podwójnych wartości postaci $2\cos(2\pi i/n) + 2\cos(2\pi j/n)$ dla $0 \le i < j \le n-1$. Należy zauważyć iż wartości własne grafu T_n mogą mieć krotności większe niż dwa, gdyż podane wyrażenia mogą mieć te same wartości dla różnych i, j.

Lemat 1. *Ekspansja krawędziowa h^E grafu T_n wynosi $\frac{4}{n}$.*

Weźmy $S = \{(i,j) : 0 \le i < n/2, 0 \le j \le n-1\}$ oraz oznaczmy $\bar{S} = V(T_n) \setminus S$. Z uwagi na parzystość n mamy $|S| = |\bar{S}| = \frac{n^2}{2}$. Zauważmy, że $E(S, \bar{S}) = 2n$, zatem $h^E \le \frac{2n}{n^2/2} = \frac{4}{n}$.

Pokażemy teraz że dla każdego zbioru S o mocy $|S| \le \frac{n^2}{2}$ mamy $\frac{|E(S,\bar{S})|}{|S|} \ge \frac{4}{n}$. Rozważmy dowolny taki zbiór S. Przez i-tą kolumnę (wiersz) grafu T_n będziemy oznaczać zbiór elementów postaci $(i, *)$ (opowiednio $(*, i)$). Weźmy pod uwagę następujące przypadki:

- Zbiór S nie zawiera żadnego wiersza ani żadnej kolumny w całości: Niech a będzie liczbą różnych wierszy których elementy zawiera zbiór S. Analogicznie niech b będzie liczbą kolumn których elementy zawiera zbiór S. Z założenia mamy $a, b < n$. Ponadto założenie to implikuje że w każdym z a wierszy mamy co najmniej dwie krawędzie poziome należące do zbioru $E(S, \bar{S})$ oraz analogicznie w każdej z b kolumn mamy co najmniej dwie krawędzie pionowe należace do $E(S, \bar{S})$. Zatem wiemy, że $E(S, \bar{S}) \ge 2a + 2b$.

Zauważmy, że $|S| \leq ab$, zatem

$$\frac{E(S,\bar{S})}{|S|} \geq \frac{2(a+b)}{ab} \geq \frac{4\sqrt{ab}}{ab} = \frac{4}{\sqrt{ab}} \geq \frac{4}{n}$$

- Zbiór S zawiera co najmniej jeden wiersz w całości, ale nie zawiera żadnej kolumny w całości: W takim wypadku wiemy, że w każdej spośród n kolumn do zbioru $E(S,\bar{S})$ należą co najmniej dwie pionowe krawędzie, zatem $E(S,\bar{S}) \geq 2n$. Z ograniczenia $|S| \leq n^2/2$ wynika teza.

- Zbiór S zawiera co najmniej jedną kolumnę w całości, ale nie zawiera żadnego wiersza w całości: dowód symetryczny do poprzedniego punktu.

- Zbiór S zawiera co najmniej jeden wiersz i co najmniej jedną kolumnę w całości: Niech a będzie liczbą wierszy które zbiór S zawiera w całości, natomiast niech b będzie liczbą kolumn, które zbiór S zawiera w całości. Z ograniczenia liczności zbioru S mamy $a, b \leq \frac{n}{2}$. Ponadto w każdym z $n-a$ wierszy (odpowiednio $n-b$ kolumn) co najmniej dwie poziome (odpowiednio pionowe) krawędzie należą do zbioru $E(S,\bar{S})$, zatem $|E(S,\bar{S})| \geq 2(n-a)+2(n-b) \geq 2n$ a z ograniczenia na rozmiar $|S|$ wynika teza.

2 Zadanie 2

Będziemy korzystać z charakteryzacji Edmondsa $PMP(G)$. Rozważmy wektor x którego wszystkie współrzędne mają wartość $\frac{1}{d}$. Dla każdej krawędzi e mamy $x_e \geq 0$ oraz dla każdego wierzchołka v mamy $\sum_{e\in\delta(v)} x_e = 1$ z uwagi na regularność grafu. Chcemy pokazać trzeci warunek Edmondsa, niech S będzie dowolnym podzbiorem V o nieparzystej mocy. Wystarczy pokazać, że $|E(S,\bar{S})| \geq d$. Bez straty ogólności możemy założyć że $|S| \leq \frac{n}{2}$ gdyż w przeciwnym wypadku podmieniamy S i $\bar{S}$ (oba mają nieparzyste rozmiary). Warunek $\Delta > 2$ implikuje $h^E > 1$ (nierówność z zajęć), czyli $|E(S,\bar{S})| \geq |S|$. Jeśli zatem mamy $|S| \geq d$ to trzeci warunek Edmondsa zachodzi, załóżmy zatem, że $|S| < d$. Zauważmy, że $|E(S,\bar{S})| = d|S| - 2|E(S,S)|$, gdzie przez $E(S,S)$ oznaczamy zbiór krawędzi (nieskierowanych) których oba końce są w zbiorze S. Oczywiście zachodzi $|E(S,S)| \leq |S| \cdot (|S|-1)/2$ (gdyż graf jest prosty), zatem

$$|E(S,\bar{S})| - d \geq d(|S|-1) - |S| \cdot (|S|-1) = (|S|-1)(d-|S|)$$

Wystarczy zatem pokażać, że dla każdego $1 \leq x < |S|$ zachodzi $(x-1)(d-x) \geq 0$. Funkcja kwadratowa $(x-1)(d-x)$ ma miejsca zerowe w $x=1$ oraz $x=d$ a pomiędzy przyjmuje wartości dodatnie, co kończy dowód.

3 Zadanie 3

Na początek chcemy pokazać, że nawet w multigrafie z pętlami zachodzi lemat $\frac{\Delta(G)}{2} \leq h^E(G)$. Twierdzenie to było pokazywane na zajęciach (połowa Tw. 1.14 z notatek), jednakże tam zakładaliśmy (niejawnie), że graf jest prosty. Ten sam dowód jest poprawny również przy założeniu że G jest d-regularnym multigrafem z pętlami. Rozważmy pomocniczy multigraf H który powstaje przez skierowanie grafu G. Każdą krawędź nieskierowaną uv dla $u \neq v$, w grafie G zamieniamy na parę krawędzi skierowanych uv oraz vu. Pętle uu w grafie G zamieniamy na pojedyncze pętle uu w H. Niech $S, S' \subseteq V$. Niech A reprezentuje macierz sąsiedztwa multigrafu G. Zauważmy, że $\mathbf{1}_S^T A \mathbf{1}_{S'}$ to liczba krawędzi w grafie H które mają swój początek w S' a koniec w S, co w dowodzie z notatek jest oznaczane jako $E(S, S')$. Z uwagi na symetrię konstrukcji multigrafu skierowanego H mamy $E(S, S') = E(S', S)$. Ponadto $|E(S,S)| = d|S| - |E(S,\bar{S})|$, gdyż w zbiorze S mamy $d|S|$ początków krawędzi, z czego $|E(S,\bar{S})|$ wychodzi na zewnątrz. Część rachunkowa dowodu się nie zmienia, więc nie będę jej tutaj przepisywał.

Oznaczmy $\alpha = \frac{2\delta}{\Delta'(G)}$. Zauważmy, że z ograniczenia na δ mamy $0 \leq \alpha < \frac{1}{3}$, czyli $\frac{2}{3} < (1-\alpha) \leq 1$. Dowód będzie nie wprost. Załóżmy, że da się usunąć co najwyżej $\delta|V|$ krawędzi tak aby wszystkie składowe miały rozmiar mniejszy niż $(1-\alpha)|V|$. Chcemy skonstruować zbiór S, który będzie spełniał $|S| > \alpha|V|$, $|S| \leq \frac{n}{2}$ oraz w grafie G' nie będzie krawędzi pomiędzy S i $\bar{S}$.

Niech X będzie największą spójną składową w G', wiemy że $|X| < (1-\alpha)|V|$. Załóżmy, że $|X| \geq \frac{|V|}{3}$. W takim wypadku jako zbiór S bierzemy mniejszy ze zbiorów X,$\bar{X}$. Jeśli wzięliśmy X, to mamy $|S| = |X| \geq \frac{|V|}{3} > \alpha|V|$. Jeśli wzięliśmy $\bar{X}$ to z założenia $|X| < (1-\alpha)|V|$ mamy $|S| = |\bar{X}| > \alpha|V|$. Załóżmy zatem, że wszystkie spójne składowe w G' mają rozmiar mniejszy niż $\frac{|V|}{3}$, oznaczmy te składowe jako $X_1, \ldots, X_\ell$. Zauważmy, że zbiór składowych da się podzielić na dwie rozłączne części, tak żeby suma rozmiarów składowych w każdej z cześci należała do zbioru $(\frac{|V|}{3}, \frac{2|V|}{3})$. Takiego podziału możemy dokonać zaczynając od podziału w którym jedna strona jest pusta a druga strona zawiera wszystie składowe i przekładając składowe ze strony drugiej na pierwszą do momentu w którym rozmiar strony drugiej spadnie poniżej $\frac{2|V|}{3}$. Z ograniczenia na wielkość składowych $|X_i| < \frac{|V|}{3}$ wynika ograniczenie na sumę rozmiarów składowych w każdej z części. Jako zbiór S bierzemy mniejszą z dwóch utworzonych części, co pozwala nam zapewnić wszystie założenia które chcieliśmy aby zbiór S spełniał.

Zatem mamy zbiór S o mocy $|S| > \frac{2\delta}{\Delta'(G)}|V|$, ponadto $|S| \leq \frac{n}{2}$. Z zajęć wiemy, że ekspansja krawędziowa $h^E(G) \geq \frac{\Delta(G)}{2} \geq \frac{\Delta'(G)}{2}$, czyli $h^E(G) > 0$. Zatem $|E_G(S,\bar{S})| > \frac{\Delta'(G)}{2} \cdot \frac{2\delta}{\Delta'(G)} \cdot |V| = \delta|V|$, co oznacza że usunięto więcej niż $\delta|V|$ krawędzi, gdyż w grafie G' nie ma krawędzi pomiędzy zbiorami S i $\bar{S}$, sprzeczność.