Praca domowa 1

Piotr Hofman

March 20, 2010

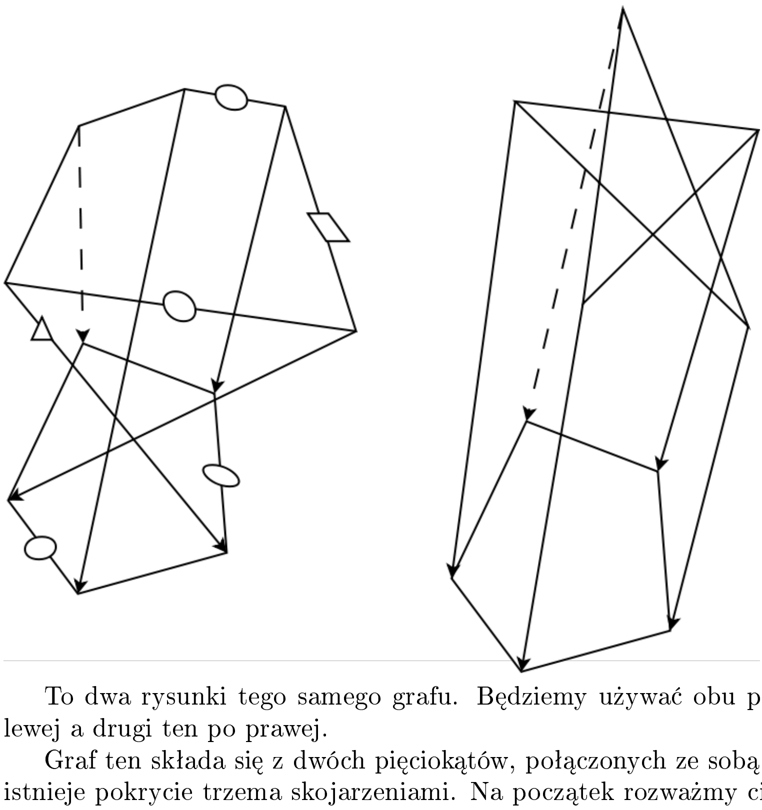
zadanie 7

Najpierw pokażemy, że kle graf jest planarny, a następnie skorzystamy z wyniku pokazanego na wykładzie. W grafie mamy przynajmniej $2^{n/655978752}$ jeśli G jest planarny (Chudnovsky, Seymour, 2008). To będzie koniec rozwiązania. Pokażemy, że kle graf jest planarny przez indukcję po ilości kroków budowy.

Klika 4 elementowa jest grafem planarnym.

Załóżmy, że dowolny graf, który ma wyprowadzenie w k krokach jest planarny. Pokażemy, że dowolny kle graf, który ma wyprowadzenie długości $k+1$ jest planarny. To weźmy k pierwszych kroków wyprowadzenia, uzyskujemy kle-graf, a zatem graf planarny. Teraz trzeba wykonać krok $k+1$. Bierzemy wierzchołek v , który ma zostać zmieniony na trójkąt. Bierzemy odległość d od tego wierzchołka do najbliższego punktu należącego do obrazu grafu bez v i krawędzi incydentnych z v. Na krawędziach wychodzących z v wstawiamy wierzchołki w odległości $1/100d$ od v i łączymy krawędziami. A następnie usuwamy wierzchołek v. Nowe krawędzie nie przecinają starych bo punkt przecięcia leżał by bliżej niż $1/2d$ od v co jest niemożliwe. Czyli koniec, uzyskujemy obraz grafu bez przecięć.

zadanie 8



To dwa rysunki tego samego grafu. Będziemy używać obu przy różnych argumentach pierwszy to ten po lewej a drugi ten po prawej.

Graf ten składa się z dwóch pięciokątów, połączonych ze sobą krawędziami ze strzałkami. Pokażemy, że nie istnieje pokrycie trzema skojarzeniami. Na początek rozważmy cięcie tego grafu przechodzące przez krawędzie ze strzałkami. Ponieważ łączą one dwie nieparzyste składowe to dowolne doskonałe skojarzenie w tym grafie musi mieć w tym przecięciu 1 lub 3 krawędzie. Dokładniej jeśli istniałoby pokrycie trzema skojarzeniami to dwa z nich musiały by mieć w przecięciu jedną krawędź a jedno 3 krawędzie. To, weźmy to które ma jedną. Spójrzmy na graf prawy. Na nim widać, że graf ten jest symetryczny i nie ma znaczenia, którą krawędź ze strzałkami wybierzemy. Wybierzmy zetem tą oznaczoną przerywaną linią. Na obrazku lewym teraz popatrzmy, które krawędzie są zdeterminowane przez nasz wybór, krawędzi i tego, że pięciokąty są połączone jedną strzałką. Otóż w skojarzeniu muszą się znaleźć krawędzie oznaczone kółkiem. To zacznijmy budować drugie skojarzenie zawierające tylko jedną strzałkę. Skoro zawiera tylko jedna strzałkę to musi zwierać po dwie krawędzie z górnego i dolnego pięciokąta. Zacznijmy od wyboru krawędzi z górnego. Na pewno w skojarzeniu musi być krawędź z rombem i jedna z krawędzi bez oznaczeń rozpatrzymy dwa przypadki.

- Romb i na lewo od przerywanej strzałki. Ten zestaw wymusza strzałkę z trójkątem, ale ona wymusza wzięcie jednej z krawędzi z kółkiem, z dolnego pięciokąta.
- Romb i na prawo od przerywanej strzałki. Analogicznie. (Z braku pomysłu na oznaczenia nie zaznaczam już tej strzałki)

Czyli nie da się stworzyć zestawu 3 skojarzeń pokrywających graf.

zadanie 9

Lemat 0.1. *Niech $G(V, W, E)$ będzie grafem dwudzielnym, w którym istnieje doskonałe skojarzenie. Wtedy istnieje wierzchołek $v \in V$ taki, że każda krawędź incydentna z v należy do jakiegoś skojarzenia.*

Dowód. Załóżmy przeciwnie, że dla każdego wierzchołka $\in V$ istnieje krawędź, która nie należy do żadnego skojarzenia. To weźmy po jednej takiej krawędzi dla każdego wierzchołka. Weźmy też krawędzie, które należą do jakiegoś skojarzenia i spójrzmy na graf powstały z tych krawędzi. Chcemy pokazać, że w grafie tym istnieje cykl, naprzemienny złożony z krawędzi z skojarzenia i krawędzi spoza skojarzenia. Każdy wierzchołek z v ma stopień 2. To zacznijmy budować ścieżkę. Zaczynamy od wierzchołka z W i stosujemy następującą regułę z wierzchołków z W do wierzchołków w V idziemy po skojarzeniu a w drugą stronę po krawędziach z poza skojarzenia. Ścieżkę kończymy budować jeśli dojdziemy do wierzchołka w którym już byliśmy lub do wierzchołka z którego nie ma wyjścia. Pokażemy że druga opcja jest niemożliwa. Ścieżka nie może się skończyć w wierzchołku z V bo stopień każdego jest 2. Ścieżeczka nie może się skończyć w wierzchołku z W, takim że nie ma z niego wyjścia, bo z każdego możemy wyjść po krawędzi ze skojarzenia.

Czyli ponieważ skończyliśmy w jakimś wierzchołku, który należy już do ścieżki, to obcinając początek ścieżki mamy cykl naprzemienny. Teraz możemy podmienić krawędzie z cyklu w skojarzeniu krawędziami z cyklu, które do skojarzenia nie należą. Skonstruowaliśmy skojarzenie zawierające krawędzie, które miały nie należeć do żadnego skojarzenia, czyli sprzeczność.

□

Jeśli $k = 1$ to teza oczywiście zachodzi.

No to teraz bierzemy wierzchołek o którym mowa w lemacie na k sposobów wybieramy sobie krawędź należącą do skojarzenia i patrzymy na pozostały graf. Należy zauważyć dwie rzeczy

- Istnieje w nim doskonałe skojarzenie.
- Stopień wierzchołków w V jest większy równy $k - 1$.

Czyli graf po wyjęciu krawędzi spełnia założenia zadania dla $k - 1$, czyli korzystamy z indukcji. Ilość skojarzeń finalnie równa się $k * (k - 1)!$.