# Wybrane zagadnienia teorii grafów
# seria 2, skojarzenia

Jakub Łącki

5 marca 2010

## Zadanie 1.

Wystarczy pokazać, że jeśli Jaś wypełnił poprawnie $k$ wierszy, to może zawsze dopisać jeden wiersz złożony z liczb od 1 do $n$, tak by nadal w każdym wierszu i każdej kolumnie każda liczba występowała co najwyżej jednokrotnie.

Zbudujmy graf dwudzielny. Wierzchołki po lewej stronie oznaczają kolumny macierzy, zaś te po prawej — liczby od 1 do $n$. Krawędzie od wierzchołka odpowiadającego kolumnie prowadzą do liczb, które w tej kolumnie jeszcze nie wystąpiły. Stopień każdego wierzchołka po lewej stronie to oczywiście $n-k$. Podobnie, stopień każdego wierzchołka po prawej to $n-k$, bo każda liczba wystąpiła wcześniej w dokładnie $k$ kolumnach. Zatem, analogicznie do wielu zadań z ćwiczeń, istnieje doskonałe skojarzenie i przypisuje ono każdej kolumnie liczbę, którą należy do niej wpisać. W ten sposób w nowym wierszu każdej liczby od 1 do $n$ użyjemy jednokrotnie i nadal nie będzie powtórzeń w ramach każdej z kolumn.

## Zadanie 2.

Pokażę najpierw, że $|A|+|M| \leq |V(G)|$. W tym celu stworzę pewne pokrycie krawędziowe $A'$ rozmiaru $|V(G)|-|M|$.

$A'$ powstaje przez dołożenie do $M$ po jednej krawędzi incydentnej do każdego wierzchołka, który nie jest skojarzony w $M$. W ten sposób dołożymy dokładnie $|V(G)|-2|M|$ krawędzi, bo każda krawędź będzie łączyć wierzchołek nieskojarzony ze skojarzonym (gdyby łączyła dwa nieskojarzone, zaprzeczyłoby to maksymalności $M$), zatem $|A'| = |V(G)|-|M|$. Każdy wierzchołek zostanie pokryty, bo w grafie nie ma wierzchołków izolowanych.

Aby pokazać przeciwną nierówność, zauważmy, że w $A$ nie ma cyklu. Gdyby było inaczej, z tego cyklu można by bez przeszkód usunąć jedną krawędź, co zaprzeczyłoby minimalności $A$. Zatem $A$ tworzy las rozpinający. Jeśli $|A| = |V(G)| - k$, to $A$ składa się z $k$ spójnych składowych. Możemy stworzyć skojarzenie $M'$ rozmiaru $k$ biorąc z każdej spójnej składowej po jednej krawędzi. Stąd $|M| \geq |M'| = k = |V(G)| - |A|$, czyli $|A| + |M| \geq |V(G)|$.

# Zadanie 3.

Dokonajmy rozkładu Gallai-Edmondsa grafu $G$. Dalej korzystam z oznaczeń z wykładu (poza $k$, które występuje w treści zadania). Wiemy, że $D$ jest niepuste, bo w przeciwnym razie graf posiadałby doskonałe skojarzenie. Część $A$ jest również niepusta. Puste $A$ oznaczałoby, że i $C$ jest puste (graf jest spójny), zatem istniałoby skojarzenie mocy $\frac{V(G)-1}{2}$ wbrew założeniu o rozmiarach maksymalnego skojarzenia.

Liczba składowych $D$ (ozn. $t$) jest większa niż $|A|$, gdyż dodatni deficyt grafu równy jest $t - |A|$. Moc $A$ to co najmniej $k$, gdyż, z $k$-spójności wiemy, że usunięcie $k-1$ wierzchołków z $A$ nie odłącza od siebie składowych $D$. Wynika stąd, że istnieje skojarzenie mocy $k$, bo możemy znaleźć skojarzenie w grafie dwudzielnym, w którym łączymy wierzchołki $A$ ze składowymi $D$. Trzecia część twierdzenia Gallai-Edmondsa oraz twierdzenie Halla gwarantują istnieje skojarzenia mocy $|A| \geq k$.

Pokrycie wierzchołkowe $G$ można stworzyć biorąc wszystkie z maksymalnego skojarzenia $M$ końce skojarzonych krawędzi, oprócz tych wierzchołków z $D$, które są skojarzone z wierzchołkami z $A$. Takie pokrycie będzie miało rozmiar $2|M| - |A| \leq 2|M| - k$. Oczywiście istnienie pewnego pokrycia wierzchołkowego gwarantuje istnienie większych pokryć.

Przy takiej konstrukcji, w częściach $A$ i $C$ do pokrycia wybierzemy wszystkie wierzchołki, więc krawędzie w ramach tych zbiorów będą pokryte, podobnie jak krawędzie z $A$ do $D$. W każdej składowej $D$ wybierzemy wszystkie wierzchołki poza jednym, zatem krawędzie wewnątrz każdej składowej również będą pokryte.