Marcin Andrychowicz

Zad. 1 Nie. Kontrprzykładem jest cykl o 100 wierzchołkach. Jest on oczywiście dwuspójny a po usunięciu dowolnego wierzchołka pozostaje ścieżka o 99 wierzchołkach, która dwuspójna już nie jest.

Zad. 2 Dowód przez indukcję po $|V|$.
Baza: Graf pusty pokrywamy zeroma podgrafami.
Krok: Załóżmy, że teza zachodzi dla wszystkich grafów zawierających mniej niż $|V|$ wierzchołków. Niech $F(G)$ oznacza rozmiar największego zbioru niezależnego w grafie G. Niech $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_s$ będzie najdłuższą ścieżką prostą w grafie G. Jeśli $s = 1$, to G składa się tylko z wierzchołków izolowanych i teza zachodzi w sposób trywialny. W dalszej części zakładam, że $s > 1$. Niech k największą liczbą z przedziału $\{1, 2, \ldots, s\}$ taką, że a_1 i a_k są połączone. Niech C oznacza cykl $a_1, a_2, \ldots, a_k$ (jeśli $k = 2$, to jest to K_2). Wówczas wszyscy sąsiedzi a_1 leżą na C (bo ścieżka byłą najdłuższa i k było maksymalne). Zatem każdy zbiór niezależny należący do $V - C$ można powiększyć o a_1, co implikuje $F(G[V - C]) \leqslant F(G) - 1$.

Zatem $F(G[V - C])$ możemy pokryć przy pomocy $F(G) - 1$ odpowiednich podgrafów. Dołączając do tego pokrycia C otrzymujemy szukane pokrycie dla grafu G.

Zad. 3 Dowód przez indukcję po k.

Baza: z tw. Mengera wiemy, że dowolne dwa wierzchołki łączą dwie rozłączne wierzchołkowo ścieżki. Po połączeniu tworzą one żądany cykl.

Krok $k \to (k + 1)$: Załóżmy, że $G = (V, E)$ jest grafem nie spełniającym tezy dla pewnego $A \subseteq V$ mocy $k + 1$. Wybieramy dowolne $v \in A$. Z założenia indukcyjnego wiemy, że istnieje cykl $c_1, c_2, \ldots$ zawierający $A - \{v\}$. Ponadto wiemy, że $\forall_i c_i \neq v$ (bo wówczas byłaby spełniona teza). Bez straty ogólności przyjmijmy, że $c_1 \in A$. Niech $f(c_i)$ oznacza największe j takie, że $j < i \wedge c_j \in A$. Ponadto przyjmijmy, że $f(1) = 0$.

Z tw. Mengera wiemy, że istnieje $k+1$ rozłącznych wierzchołkowo ścieżek z v do c_1. Zdefiniujemy teraz funkcję p ze zbioru tych $k + 1$ ścieżek w $\{0\} \cup \{i : c_i \in A\}$. Rozpatrzmy S będącą dowolną z tych ścieżek. Niech c_x będzie pierwszym wierzchołkiem na tej ścieżce należącym do naszego cyklu od strony v. Wówczas przyjmijmy, że $p(S) = f(c_x)$.

Lemat 1. $S \neq S' \wedge p(S) = p(S') \implies p(S) = p(S') = 0$

Załóżmy, że istnieją dwie ścieżki S i S' takie, że $f(S) = f(S') \neq 0$. Niech c_x i $c_{x'}$ będą pierwszymi wierzchołkami z naszego cyklu od strony v w tych ścieżkach. Rozpatrywane ścieżki były rozłączne wierzchołkowo, więc $x \neq x'$. Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że $x < x'$. Wiemy, że $\forall_{x<i<x'}\ c_i \notin A$. Wówczas cykl

$$c_x \leadsto^S v \leadsto^{S'} c_{x'} \to c_{x'+1} \to c_{x'+2} \to \ldots$$

jest prosty i zawiera całe A, czyli sprzeczność.

Lemat 2. $|p^{-1}(0)| \geqslant 2$

Mamy $k + 1$ ścieżek i przeciwdziedzina p ma moc $k + 1$, więc z zasady szufladkowej Dirichleta istnieje taka ścieżka S, że $p(S) = 0$. Z powodu analogicznego jak w lemacie nie istnieje wówczas ścieżka S, taka, że $p(S) = 1$. Zatem z zasady szufladkowej Dirichleta przeciwdziedzina zera musi być po najmniej dwuelementowa.

Niech E i E' będą dwoma ścieżkami z $p^{-1}(0)$. Obie te ścieżki jak i nasz cykl są rozłączne wierzchołkowo nie licząc c_1 i v.

Niech m będzie minimalną liczbą taką, że $m > 1 \wedge c_m \in A$. Analogicznie dowodzimy, że istnieje F będąca ścieżką łączącą v i c_m, która jest rozłączna wierzchołkowo z cyklem nie licząc c_m.

Gdyby F było rozłączne z E i E' (nie licząc v), to cykl

$$c_1 \leadsto^E v \leadsto^F c_m \to c_{m+1} \to c_{m+2} \to \ldots$$

byłby prosty i przechodził przez całe A. Zatem F przecina się z E lub E'.

Niech w będzie pierwszym od strony c_m wierzchołkiem na F należącym do E lub E'. Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że w należy do E'. Wówczas cykl

$$c_1 \rightsquigarrow^E v \rightsquigarrow^{E'} w \rightsquigarrow^F c_m \to c_{m+1} \to c_{m+2} \dots$$

jest prosty i zawiera całe A.

Zatem początkowe założenie było fałszywe i taki graf nie istnieje.